512.94
T72u

Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BERN

VORGELEGT VON

HANS TREPP

von Hinterrhein (Graubünden).

Von der philosophischen Fakultät auf den Antrag des Herrn Prof. Dr. J. H. Graf angenommen.

Bern, den 19. Juli 1917.

Der Dekan:
Prof. Dr. H. Maync.

CHUR 1918
BUCHDRUCKEREI SPRECHER, EGGERLING & CIE.

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
512.94
~~512.2~~
T72u

MATHEMATICS

5121 2

Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BERN

VORGELEGT VON

Hans Trepp

von **Hinterrhein** (Graubünden).

Von der philosophischen Fakultät auf den Antrag des Herrn Prof. Dr. J. H. Graf angenommen.

Bern, den 19. Juli 1917.

Der Dekan:
Prof. Dr. **H. Maync.**

CHUR 1918.
BUCHDRUCKEREI SPRECHER, EGGERLING & CIE.

512.94
512.2
T72u
Math
21Oct30 MO

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
I. Kapitel.	Bedingungen für die Realität der Wurzeln . .	1
§ 1.	Sämtliche Wurzeln sind reell und verschieden, wenn die Reihe $f(x)$; $f'(x)$; $\cdots$; $f^{(n)}(x)$ eine Sturm'sche Kette bildet	1
§ 2.	Die Newton'schen Ausdrücke	8
§ 3.	Kriterium, das aus der Theorie der quadratischen Formen folgt	14
§ 4.	Eine Bedingung von Laguerre	22
II. Kapitel.	Näherungsmethoden zur Berechnung der Wurzeln .	28
§ 1.	Bestimmung von Näherungswerten, die sich einer Wurzel von der nämlichen Seite nähern mit Beispielen . .	28
§ 2.	Bestimmung von Näherungswerten, die sich einer Wurzel von beiden Seiten nähern mit Beispiel	44

p 61929

Quellen.

Biermann, Otto. Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.

Burkhardt, Hch. Funktionentheoretische Vorlesungen.

Duséjour, D. Méthode pour déterminer le nombre des racines réelles et imaginaires des équations.

Hermite, Ch. Oeuvres publ. sous les auspices de l'acad. des sc.

Hurwitz, Ad. Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt.

Lagrange, J. L. Traité de la résolution des équations numériques.

— De la résolution des équations numériques de tous les degrés.

Laguerre, E. N. Oeuvres de Laguerre.

Martin, P. Théorie et pratique des calculs d'approximation numériques.

Serret, J. A. Handbuch der höhern Algebra.

Sturm, Ch. Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen.

Wagner, W. Bestimmung der Genauigkeit, welche die Newton'sche Methode zur Berechnung der Wurzeln darbietet.

Weber, Hch. Lehrbuch der Algebra.

I. Kapitel.

Bedingungen für die Realität der Wurzeln.

Eine algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Wurzeln, jede Wurzel mit der ihr zukommenden Multiplizität gezählt. Unter diesen n Wurzeln können sich sowohl reelle als auch imaginäre Wurzeln befinden, und zwar treten bei reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die imaginären Wurzeln immer paarweise als konjugiert imaginäre Werte auf. Soll die Gleichung $f(x) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzen, so müssen die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ der gegebenen Gleichung gewissen Bedingungen genügen.

§ 1. Sämtliche Wurzeln sind reell und verschieden, wenn die Reihe $f(x), f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ eine Sturm'sche Kette bildet.

Zu einer ersten notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß eine algebraische Gleichung lauter reelle Wurzeln besitzt, gelangen wir durch folgende Betrachtung:

Es sei

$$(1) \qquad f(x) = A_0 x^{n_0} + A_1 x^{n_1} + \cdots + A_k x^{n_k} = 0$$

eine algebraische Gleichung vom Grad n_0, und wobei

$$n_0 > n_1 > \cdots > n_k \geqq 0$$

ist, und $n_0, n_1, \ldots, n_k$ positive und ganze Zahlen sind.

Ferner möge von den Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_k$ keiner verschwinden.

Bezeichnen wir mit W die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe

$$A_0, A_1, A_2, \cdots, A_k,$$

so ist nach der Definition des Vorzeichenwechsels

$$W = \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{1 - sgn(A_i \cdot A_{i+1})}{2}$$

Ersetzen wir in der Gleichung (1) x durch $-x$, so geht (1) über in

$$(1') \quad f(-x) = (-1)^{n_0} A_0 x^{n_0} + (-1)^{n_1} A_1 x^{n_1} + \cdots + (-1)^{n_k} A_k x^{n_k} = 0,$$

und es ist W', die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe

$$(-1)^{n_0} A_0, \ (-1)^{n_1} A_1, \ \cdots, \ (-1)^{n_k} A_k$$

gegeben durch

$$W' = \sum_{i=0}^{i=k-1} \frac{1 - (-1)^{n_i + n_{i+1}} \cdot sgn\,(A_i \cdot A_{i+1})}{2}$$

Bezeichnen wir mit P und N die Anzahl der positiven, resp. negativen Wurzeln der Gleichung (1), so gelten die Relationen:

$$P = W - 2\,\mu_1$$
$$N = W' - 2\,\mu_2$$

wobei μ_1 und μ_2 nicht negative ganze Zahlen bedeuten.

Nach dem Budan-Fourier'schen Theorem ist nämlich die Anzahl derjenigen reellen Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

die größer als eine gegebene Zahl a sind, bestimmt durch

$$N(a) = W(a) - 2\,\mu.$$

Dabei bedeutet μ eine nicht negative ganze Zahl und $W(a)$ die Anzahl der Zeichenwechsel, welche die Reihe

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x) \tag{3}$$

für $x = a$ darbietet, wobei etwa verschwindende Glieder dieser Reihe als nicht vorhanden betrachtet werden.

Die Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung (1) ist also gegeben durch

$$P = W(o) - 2\mu$$

und wir haben, auf Grund unserer Bezeichnung, nur nachzuweisen, daß

$$W(o) = W$$

ist.

Die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (3) bleibt sich gleich, wenn wir die Reihe umgekehrt aufschreiben.

$$f^{(n)}(x),\ f^{(n-1)}(x),\ \cdots,\ f'(x),\ f(x). \tag{3'}$$

Wir bilden diese Reihe für die gegebene Gleichung (1).

$$\left|\begin{array}{ll} f^{(n_0)}(x) & = n_0!\,A_0 \\ f^{(n_0-1)}(x) & = \dfrac{n_0!}{1!}A_0\,x \\ \vdots & \\ f^{(n_1)}(x) & = \dfrac{n_0!}{(n_0-n_1)!}A_0\,x^{n_0-n_1} + n_1!\,A_1 \\ f^{(n_1-1)}(x) & = \dfrac{n_0!}{(n_0-n_1+1)!}A_0\,x^{n_0-n_1+1} + \dfrac{n_1!}{1!}A_1\,x \\ \vdots & \\ f^{(n_k)}(x) & = \dfrac{n_0!}{(n_0-n_k)!}A_0\,x^{n_0-n_k} + \cdots + n_k!\,A_k. \end{array}\right. \tag{4}$$

Setzen wir nun für $x = 0$, so sind die nicht verschwindenden Therme auf der rechten Seite unseres Gleichungssystems (4):

$$n_0!\,A_0;\ n_1!\,A_1;\ \cdots;\ n_k!\,A_k.$$

Daher ist $W(o)$, die Anzahl der Zeichenwechsel für $x = 0$ in der Reihe

$$f^{(n_0)}(x);\ f^{(n_0-1)}(x);\ \cdots;\ f^{(n_i)}(x);\ \cdots;\ f^{(n_k)}(x),$$

wobei verschwindende Glieder als nicht vorhanden betrachtet werden, gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$n_0!\,A_0;\ n_1!\,A_1;\ \cdots;\ n_k!\,A_k$$

und da nach Voraussetzung $n_0, n_1, \ldots, n_k$ lauter positive ganze Zahlen sind, auch gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_k,$$

das heißt, es ist in der Tat

$$W(o) = W.$$

Daß die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung (1)

$$N = W' - 2\,\mu_2$$

ist, geht daraus hervor, daß die positiven Wurzeln der Gleichung (1′) übereinstimmen mit den negativ genommenen negativen Wurzeln der gegebenen Gleichung (1).

Bezeichnen wir mit J die Anzahl der imaginären Wurzeln der Gleichung (1), so ist:

$$J = n_0 - P - N - n_k,$$

wobei n_k die Anzahl der Nullwurzeln bedeutet; es ist daher:

$$\begin{aligned} J &= (n_0 - n_k) - (W + W') + 2\,\mu \\ &= \sum_{i=0}^{i=k-1} (n_i - n_{i+1}) - \sum_{i=0}^{i=k-1} \left\{ 1 - sgn\,(A_i \cdot A_{i+1}) \frac{1 + (-1)^{n_i + n_{i+1}}}{2} \right\} + 2\,\mu \\ &= \sum_{i=0}^{i=k-1} \left\{ (n_i - n_{i+1} - 1) + sgn\,(A_i \cdot A_{i+1}) \frac{1 - (-1)^{n_i - n_{i+1} - 1}}{2} \right\} + 2\,\mu \end{aligned}$$

Indem wir

$$f_i = n_i - n_{i+1} - 1$$

setzen, wobei also f_i die Anzahl der fehlenden Glieder zwischen

n_i und n_{i+1} bedeutet, wird

$$J = \sum_{i=0}^{i=k-1} \left\{ f_i + sgn\,(A_i \cdot A_{i+1}) \frac{1-(-1)^{f_i}}{2} \right\} + 2\,\mu.$$

Wir treffen nun folgende Festsetzung:

Ist f_i gerade, so setzen wir $\lambda_i = f_i$
Ist f_i ungerade, so setzen wir $\lambda_i = f_i \pm 1$,
je nachdem $sgn\,(A_i \cdot A_{i+1}) = \pm 1$ ist.

Wir bezeichnen λ_i als die Lückenzahl und sehen, daß diese gerade gleich dem Ausdruck unter dem Summenzeichen ist.

Es ist also:

$$J = \sum_{i=0}^{i=k-1} \lambda_i + 2\,\mu$$

$$\underline{J = \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 2\,\mu}$$

Dabei bedeutet μ eine nicht negative ganze Zahl und wir haben den

Satz: Die Anzahl der imaginären Wurzeln einer reellen, algebraischen Gleichung ist um eine gerade, nicht negative Zahl größer, als die Summe der Lückenzahlen.

Aus diesem Satz, den wir nach Hurwitz als den Gauß'schen Lückensatz bezeichnen wollen, ergeben sich zwei Bedingungen, welche notwendigerweise erfüllt sein müssen, damit sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

reell sind.

1. Verschwindet in der Reihe der Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

irgend ein Glied, so haben die beiden Nachbarglieder entgegengesetztes Vorzeichen.

2. Es dürfen nicht zwei oder mehr aufeinanderfolgende Glieder in der Reihe der Koeffizienten verschwinden.

Diese beiden notwendigen Bedingungen sind nicht hinreichend, denn es kann die Anzahl der imaginären Wurzeln ja immer noch eine gerade Zahl sein.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die reelle algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$(5) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

welche die n voneinander verschiedenen, reellen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besitzt.

Die Gleichung

$$f(x + t) = 0,$$

und wobei t eine reelle Zahl bedeutet, besitzt dann ebenfalls n voneinander verschiedene, reelle Wurzeln.

Es ist

$$f(x+t) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}t + \frac{f''(x)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(i)}(x)}{i!}t^i + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}t^n = 0.$$

Auf diese Gleichung mit nur reellen Wurzeln wenden wir den Gauß'schen Lückensatz an.

x sei ein Wert, für den z. B. $f'(x)$ verschwindet. Da nach Voraussetzung sämtliche Wurzeln verschieden sind, so ist $f(x) \neq 0$. $f''(x)$ darf nach dem Lückensatz nicht verschwinden, da sonst die Lückenzahl mindestens zwei wäre. Ferner müssen für den betrachteten Wert von x für die beiden Funktionen $f(x)$ und $f''(x)$ entgegengesetzte Vorzeichen resultieren.

Verallgemeinern wir diese Betrachtung für ein beliebiges i aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$.

Es möge für einen bestimmten Wert von x

$$f^{(i)}(x) = 0$$

werden. Aus dem Lückensatz folgt, daß dann

$$f^{(i-1)}(x) \neq 0$$
$$f^{(i+1)}(x) \neq 0$$

sein müssen und daß ferner

$$sgn\ f^{(i-1)}(x) = -\ sgn\ f^{(i+1)}(x)$$

ist.

Daraus schließen wir, daß die Reihe

$$f(x);\ f'(x);\ f''(x);\ \cdots;\ f^{(n)}(x) \tag{6}$$

eine Sturm'sche Kette bildet, und wir haben den

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, besteht darin, daß die Reihe der Funktionen

$$f(x);\ f'(x);\ f''(x);\ \cdots;\ f^{(n)}(x)$$

eine Sturm'sche Kette bildet.

Daß diese Bedingung notwendig ist, ergibt sich aus der soeben gemachten Betrachtung, und wir haben nur noch den Nachweis zu leisten, daß sie auch hinreichend ist.

Angenommen, die Reihe

$$f(x);\ f'(x);\ f''(x);\ \cdots;\ f^{(n)}(x)$$

bilde eine Sturm'sche Kette.

Die Anzahl sämtlicher reeller Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ist nach dem Sturm'schen Theorem gegeben durch:

$$W(-\infty) - W(+\infty).$$

Dabei bedeuten $W(-\infty)$, resp. $W(+\infty)$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Reihe (6), wenn wir für x einen sehr großen negativen, resp. sehr großen positiven Wert setzen, den wir mit $-\infty$, resp. $+\infty$ bezeichnen.

Für genügend große Werte des Arguments wird das Vorzeichen einer Funktion bestimmt durch das Vorzeichen

des Koeffizienten des Gliedes mit der höchsten Potenz der Variabeln.

$W(-\infty)$ ist also die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(-1)^n \operatorname{sgn} a_n;\ (-1)^{n-1} \operatorname{sgn} a_n;\ \cdots;\ \operatorname{sgn} a_n$$

das heißt

$$W(-\infty) = n.$$

$W(+\infty)$ ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$\operatorname{sgn} a_n;\ \operatorname{sgn} a_n;\ \cdots;\ \operatorname{sgn} a_n$$

das heißt

$$W(+\infty) = 0.$$

Die Anzahl der reellen, verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ beträgt n, und da $f(x) = 0$ eine Gleichung $n$ten Grades ist, so sind in der Tat sämtliche Wurzeln reell.

§ 2. Die Newton'schen Ausdrücke.

Zu einer zweiten notwendigen Bedingung dafür, daß eine algebraische Gleichung nur reelle Wurzeln besitzt, gelangen wir folgendermaßen:

Es sei

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

eine algebraische Gleichung $n$ten Grades mit den n reellen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen einstweilen keine eine Nullwurzel sei, das konstante Glied a_0 also von Null verschieden.

Die zu diesen Wurzeln reziproken Werte erhalten wir in den Wurzeln der Gleichung

$$(1') \qquad f(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Bezeichnen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Wurzeln der Gleichung (1'), so ist allgemein

$$y_i = \frac{1}{x_i};\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

Da nach Voraussetzung sämtliche Wurzeln von (1) reell sind, so sind dies auch die Wurzeln von (1').

Wir betrachten nun die folgende Summe:

$$(2) \qquad S = \sum_{i>k}^{1\cdots n} (y_i - y_k)^2.$$

Da alle Wurzeln von (1') reell sind, ist die Summe (2) notwendigerweise nicht negativ. Der Fall, daß die Summe den Wert Null besitzt, tritt nur dann ein, wenn unter den n Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und somit auch unter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ keine zwei voneinander verschieden sind.

Die obige Summe läßt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i>k}^{1\cdots n} (y_i - y_k)^2 = \sum_{i>k}^{1\cdots n} (y_i^2 + y_k^2 - 2\, y_i\, y_k) \\ &= (n-1)\,(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) - 2\,(y_2\, y_1 + y_3\, y_1 + \cdots \\ &\qquad + y_n\, y_1 + y_3\, y_2 + \cdots + y_n\, y_{n-1}) \\ &= (n-1)\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2 - 2\,n\,(y_2\, y_1 + y_3\, y_1 + \cdots \\ &\qquad + y_n\, y_1 + y_3\, y_2 + \cdots + y_n\, y_{n-1}) \\ &= (n-1)\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\,n\left(\frac{a_2}{a_0}\right) \\ &= \frac{1}{a_0^2}\left[(n-1)\,a_1^2 - 2\,n\,a_0\,a_2\right] \end{aligned}$$

Da S einen nicht negativen Wert hat, muß notwendigerweise

$$(3) \qquad (n-1)\,a_1^2 - 2\,n\,a_0\,a_2 \geqq 0$$

sein, wobei also das Gleichheitszeichen nur dann besteht, wenn alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einander gleich sind.

Die Relation (3) ist auch erfüllt, wenn wir $a_0 = 0$ setzen, was wir zu Anfang unserer Betrachtung ausgeschlossen haben.

Die Beziehung (3) besteht also immer, wenn $f(x) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt; also muß sie auch gültig sein

für $f'(x)$, $f''(x)$, . . ., da die Ableitungen einer Funktion mit lauter reellen Nullstellen ebenfalls nur solche besitzen, wie wir leicht zeigen können.

Die algebraische Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ besitze die reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln

$$x_1 ; \; x_2 ; \; \cdots ; \; x_k$$

mit den Multiplizitäten

$$r_1 ; \; r_2 ; \; \cdots ; \; r_k$$

sodaß also

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

ist.

$f'(x) = 0$ besitzt dann

in x_1 eine $(r_1 - 1)$ fache Wurzel
„ x_2 „ $(r_2 - 1)$ „ „
⋮ ⋮
„ x_k „ $(r_k - 1)$ „ „

Ferner liegt nach dem Rolle'schen Theorem mindestens je eine reelle Wurzel von $f'(x) = 0$ im Intervall $x_1 \dashv x_2$; $x_2 \dashv x_3$; . . .; $x_{k-1} \dashv x_k$.

Die Anzahl der reellen Wurzeln von $f'(x) = 0$ beträgt somit mindestens

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \cdots + (r_k - 1) + (k - 1)$$
$$= (r_1 + r_2 + \cdots + r_k) - 1 = n - 1,$$

und da $f'(x)$ eine Funktion vom Grade $(n - 1)$ ist, sind also sämtliche Wurzeln von $f'(x) = 0$ reell.

Ganz gleich besitzt $f''(x) = 0$ auch nur reelle Wurzeln u. s. f.

Die Relation (3) ist also allgemein für die $i$te Ableitung von

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_n x^n = 0$$

gültig.

Indem wir in der Gleichung

$$f^{(i)}(x) = i!\,a_i + \frac{(i+1)!}{1!}\,a_{i+1}\,x + \cdots + \frac{n!}{(n-i)!}\,x^{n-i} = 0$$

$i = k-1$ setzen und durch $k!$ dividieren, erhalten wir

$$\frac{1}{k!}\,f^{(k-1)}(x) = \frac{1}{k}\,a_{k-1} + a_k \cdot x + \frac{k+1}{2!}\,a_{k+1}\,x^2 + \cdots + \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\,x^{n-k+1} = 0.$$

Für diese Gleichung vom Grad $(n-k+1)$ mit nur reellen Wurzeln lautet die Relation (3):

$$(n-k)\,a_k^2 - 2\,(n-k+1) \cdot \frac{1}{k} \cdot a_{k-1} \cdot \frac{k+1}{2}\,a_{k+1} \geqq 0,$$

oder

$$(4) \qquad a_k^2 - \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \left(\frac{n-k+1}{n-k}\right) a_{k-1} \cdot a_{k+1} \geqq 0.$$

Indem wir in (4) k der Reihe nach 1, 2, 3, . . ., $(n-1)$ setzen, entstehen $(n-1)$ Einzelbedingungen, deren linke Seiten man als die Newton'schen Ausdrücke bezeichnet. Sie lauten:

$$(5) \qquad \left|\begin{array}{lll} a_1^2 & -\dfrac{2}{1} \cdot \dfrac{n}{n-1}\,a_0 \cdot a_2 & \geqq 0 \\ a_2^2 & -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{n-1}{n-2}\,a_1 \cdot a_3 & \geqq 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2}^2 & -\dfrac{n-1}{n-2} \cdot \dfrac{3}{2}\,a_{n-3} \cdot a_{n-1} & \geqq 0 \\ a_{n-1}^2 & -\dfrac{n}{n-1} \cdot \dfrac{2}{1}\,a_{n-2} \cdot a_n & \geqq 0, \end{array}\right.$$

und wir können folgenden Satz aufstellen:

Satz: Eine notwendige, nicht hinreichende Bedingung dafür, daß die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n = 0$$

nur reelle Wurzeln besitzt, ist die, daß die unter (5) angegebenen Newton'schen Ausdrücke erfüllt sind.

Daß diese Bedingung notwendig ist, ergibt sich aus ihrer Herleitung; daß sie nicht hinreichend ist, geht daraus hervor, daß die Summe

$$\sum_{i>k}^{1\cdots n} (y_i - y_k)^2 ,$$

von der wir bei unserer Betrachtung ausgegangen sind, auch dann einen nicht negativen Wert besitzen kann, falls sich unter den Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und somit auch unter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ imaginäre Wurzeln befinden.

Wir können die Unzulänglichkeit der Bedingung auch leicht an einem Zahlenbeispiel erkennen.

Die Gleichung dritten Grades

$$f(x) = 9x^3 - 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

genügt den Newton'schen Ausdrücken.

$$\begin{aligned} a_3 = 9;\ a_2 = -5;\ a_1 = -4;\ a_0 &= 7 \\ a_1^2 - 3\,a_0\,a_2 \geqq 0;\quad 16 + 3\cdot 5\cdot 7 &> 0 \\ a_2^2 - 3\,a_1\,a_3 \geqq 0;\quad 24 + 3\cdot 4\cdot 9 &> 0. \end{aligned}$$

Die gegebene Gleichung besitzt aber nur eine reelle Wurzel, die beiden andern sind konjugiert imaginär, wie man leicht sieht, da die Diskriminante der Gleichung einen negativen Wert hat.

Es ist die Diskriminante

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 a_2^2 + 18\,a_0\,a_1\,a_2\,a_3 - 4\,a_0\,a_2^3 - 4\,a_1^3\,a_3 - 27\,a_0^2\,a_3^2 \\ &= -78279, \end{aligned}$$

also negativ.

Berücksichtigen wir, daß sich der Fall der Gleichheit in (5) auf lauter gleiche Wurzeln von $f(x) = 0$ bezieht, und schalten wir diesen Fall aus, so haben wir eine Übereinstimmung des Gauß'schen Lückensatzes mit den Newton'schen Ausdrücken.

1. Verschwindet nämlich ein mittleres Glied in der Reihe der Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$

so sind die beiden Nachbarglieder von Null verschieden und haben entgegengesetztes Vorzeichen.

2. Es können keine zwei aufeinanderfolgende Glieder in der Reihe der Koeffizienten verschwinden.

Betrachten wir nun den Fall lauter gleicher Wurzeln von $f(x) = 0$, und schalten dabei den Spezialfall der Nullwurzel aus, so behaupten wir:

Besitzt die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

eine n-fache Wurzel, die nicht Nullwurzel ist, so darf in der Reihe der Koeffizienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

kein Glied verschwinden. Die Vorzeichen der Glieder dieser Reihe bilden entweder lauter Folgen oder lauter Wechsel.

Nehmen wir an, es würde irgend ein mittleres Glied verschwinden, so ersehen wir aus den Newton'schen Ausdrücken, daß dann notwendigerweise sämtliche Glieder der Reihe verschwinden mit Ausnahme von a_0 und a_n, die jeden beliebigen reellen Wert haben könnten. Das widerspricht dem Gauß'schen Lückensatz, wonach in der Reihe der Koeffizienten keine zwei aufeinanderfolgenden Glieder verschwinden dürfen.

Haben wir festgelegt, daß kein Koeffizient verschwinden darf, so sehen wir, daß die Beziehung

$$a_k^2 - \left(\frac{k+1}{k}\right) \cdot \left(\frac{n-k+1}{n-k}\right) a_{k-1} \cdot a_{k+1} = 0$$

nur dann bestehen kann, wenn a_{k-1} und a_{k+1} das nämliche Vorzeichen haben. Es müssen dann auch notwendigerweise

die Koeffizienten a_{k+3}, a_{k+5}, . . ., a_{k-3}, a_{k-5}, . . . im Vorzeichen übereinstimmen mit a_{k+1}.

Aus der analogen Gleichung

$$a_{k+1}^2 - \left(\frac{k+2}{k+1}\right) \cdot \left(\frac{n-k}{n-k-1}\right) a_k \cdot a_{k+2} = 0$$

folgt, daß a_k und a_{k+2} gleiches Vorzeichen haben müssen, und daher auch

$$a_{k+4},\ a_{k+6},\ \cdots,\ a_{k-2},\ a_{k-4},\ \cdots$$

im Vorzeichen übereinstimmen mit a_k. Je nachdem nun a_k und a_{k+1} unter sich gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, folgt, daß die Reihe der Koeffizienten entweder lauter Vorzeichen-Folgen oder -Wechsel besitzt.

[Zum nämlichen Resultat gelangt man durch die einfache Überlegung, daß

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 = a_n (x - a)^n$$

ist, wobei a die n-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet.]

§ 3. Kriterium, das aus der Theorie der quadratischen Formen folgt.

Eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine algebraische Gleichung nur reelle, voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, hat Hermite aufgestellt.

Es sei

$$f(x) = 0$$

eine Gleichung $n$ten Grades mit reellen Koeffizienten, über deren Wurzeln wir noch nichts voraussetzen.

Es sei ferner $\Phi(x)$ eine Funktion von beliebigem Grad mit reellen Koeffizienten.

Wir bilden die Entwicklung des Bruches $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ nach fallenden Potenzen von x und betrachten hauptsächlich den Teil der Entwicklung mit negativen Exponenten der Variabeln.

Nach der Interpolationsformel von Lagrange ist:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(x_i)}{(x - x_i) \cdot f'(x_i)},$$

wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ bedeuten, und $\varphi(x)$ eine Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades ist.

Ist $\Phi(x)$ eine Funktion höhern als $(n-1)$ten Grades, so ist

$$\Phi(x) = Q(x) \cdot f(x) + \varphi(x),$$

wobei $Q(x)$ eine ganze Funktion oder eine Konstante bedeutet.

Setzen wir für x irgend eine Wurzel x_i der Gleichung $f(x) = 0$, so wird

$$\Phi(x_i) = \varphi(x_i).$$

Es ist daher

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi(x_i)}{(x - x_i) f'(x_i)}$$

$$= Q(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i)}{(x - x_i) f'(x_i)}$$

Da

$$\frac{1}{x - x_i} = x^{-1} + x_i x^{-2} + x_i^2 x^{-3} + \cdots$$

ist, und bezeichnen wir den Teil der Entwicklung von $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ mit negativen Exponenten mit

$$(1) \qquad c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \cdots = \sum_{h=0}^{h=\infty} c_h x^{-h-1},$$

so ergeben sich für die Koeffizienten c_0, c_1, c_2, . . . folgende Werte:

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i)}{f'(x_i)} \\ c_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i) \cdot x_i}{f'(x_i)} \\ &\vdots \\ c_\lambda &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i) \cdot x_i^\lambda}{f'(x_i)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Setzen wir speziell

$$\Phi(x) = f'(x),$$

so erhalten die Koeffizienten folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} c_0 &= n = s_0 \\ c_1 &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i = s_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_\lambda &= \sum_{i=1}^{i=n} x_i^\lambda = s_\lambda \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned},$$

das heißt, die Koeffizienten gehen über in die entsprechenden Potenzsummen der Wurzeln von $f(x) = 0$.

Nun möge ferner

$$\Theta(x) = t_0 + t_1 x + \cdots + t_{m-1} x^{m-1} = \sum_{k=0}^{k=m-1} t_k x^k$$

eine ganze Funktion von beliebigem Grad $(m-1)$ sein, deren Koeffizienten t_0, t_1, . . ., t_{m-1} als willkürliche Parameter angesehen werden.

Wir entwickeln den Bruch

$$\frac{\Phi(x) \cdot \Theta^2(x)}{f(x)}$$

nach fallenden Potenzen von x und ordnen in der Entwicklung nach absteigenden Potenzen der Variabeln x.

$$\frac{\Phi(x)\cdot\Theta^2(x)}{f(x)} = \frac{\Phi(x)}{f(x)} \sum_{i,k}^{0\cdots m-1} t_i t_k x^{i+k} \quad \text{und nach (1)}$$

$$= \sum_{i,k=0\cdots(m-1)}^{h=0\cdots\infty} c_h t_i t_k x^{-h-1+i+k}$$

$$(2) \qquad = \sum_{\lambda=-(2m-2)}^{\lambda=\infty} x^{-\lambda-1} \sum_{i,k}^{0\cdots(m-1)} c_{\lambda+i+k} t_i t_k .$$

Bezeichnen wir in der Division

$$\frac{\Theta(x)}{f(x)}$$

den Rest mit $\Theta_1(x)$, so ist dieser eine Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades von der Form

$$\Theta_1(x) = t'_0 + t'_1 x + \cdots + t'_{n-1} x^{n-1} ,$$

und hiebei sind t'_0, t'_1, . . ., t'_{n-1} lineare, homogene Funktionen der willkürlichen Parameter t_0, t_1, . . ., t_{m-1}.

Da die Entwicklung der beiden Brüche

$$\frac{\Phi(x)\cdot\Theta^2(x)}{f(x)}$$

und

$$\frac{\Phi(x)\cdot\Theta_1^2(x)}{f(x)}$$

nach abnehmenden Potenzen von x für beide Brüche die nämlichen Glieder mit negativen Exponenten der Variabeln ergibt, können die in (2) auftretenden quadratischen Formen der m Parameter t_i

$$A_\lambda = \sum_{i,k}^{0\cdots(m-1)} c_{\lambda+i+k} t_i t_k$$

auch gebildet werden aus den n Parametern t'_i. Infolgedessen ist r_λ, die Anzahl der Quadrate der Form A_λ mit verschwindenden Koeffizienten, mindestens $= m - n$.

Soll A_λ eine definite Form sein, das heißt eine Form, bestehend aus lauter positiven oder lauter negativen Quadraten, so darf $\Theta(x)$ höchstens eine Funktion $(n-1)$ten Grades sein.

Nun betrachten wir die spezielle quadratische Form

$$A_0 = A = \sum_{i,\,k}^{0\cdots(n-1)} c_{i+k}\, t_i\, t_k. \tag{3}$$

Nehmen wir an, $\Phi(x)$ und $f(x)$ besitzen einen gemeinschaftlichen Faktor vom Grad v. Indem wir in (2) durch diesen Faktor kürzen, wird der Grad des Nenners auf $(n-v)$ erniedrigt, während $\Theta(x)$ sich gleich geblieben ist. r, die Anzahl der verschwindenden Quadrate der Form (3), wird daher mindestens $= n - (n-v) = v$ sein, A also keine definite Form.

Besitzt $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, so läßt sich eine ganze Funktion $G(x)$ finden, sodaß

$$f(x) = G^2(x) \cdot f_1(x)$$

ist. Da dann $G(x) \cdot f_1(x)$ eine Funktion höchstens $(n-1)$ten Grades ist, ist es möglich, die n willkürlichen Parameter $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ so zu wählen, daß

$$\Theta(x) = G(x) \cdot f_1(x)$$

wird. Dann ist

$$\frac{\Phi(x) \cdot \Theta^2(x)}{f(x)} = \Phi(x)\, \frac{G^2(x) \cdot f_1^2(x)}{G^2(x) \cdot f_1(x)} = \Phi(x) \cdot f_1(x)$$

eine ganze Funktion. A müßte daher für Werte der Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ verschwinden, die nicht sämtlich gleich Null sind; A kann infolgedessen keine definite Form sein.

Dies vorausgeschickt, nehmen wir an,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

besitze die n verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$; ferner seien $\Phi(x)$ und $f(x)$ relativ prim.

Es ist:

$$\frac{\Phi(x) \cdot \Theta^2(x)}{f(x)} = Q(x) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i) \cdot \Theta^2(x_i)}{f'(x_i)(x - x_i)}$$

$$= Q(x) + \sum_{i=1\cdots n}^{\lambda=0\cdots\infty} \left\{ \frac{\Phi(x_i)\,\Theta^2(x_i)}{f'(x_i)} \cdot x_i^{\lambda} x^{-\lambda-1} \right\},$$

und wir haben dadurch

$$A_\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i)\,\Theta^2(x_i)}{f'(x_i)} x_i^{\lambda}$$

dargestellt als die Summe von n Quadraten voneinander linear unabhängiger, linearer Funktionen, denn: die Determinante des Gleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(x_1) = t_0 + t_1 x_1 + \cdots + t_{n-1} x_1^{n-1} \\ \Theta(x_2) = t_0 + t_1 x_2 + \cdots + t_{n-1} x_2^{n-1} \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \Theta(x_n) = t_0 + t_1 x_n + \cdots + t_{n-1} x_n^{n-1} \end{array} \right.$$

ist

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>k}^{1\cdots n} (x_i - x_k),$$

und da wir sämtliche Wurzeln als verschieden vorausgesetzt haben, von Null verschieden. Die Funktionen $\Theta(x_1)$, $\Theta(x_2)$, $\ldots$, $\Theta(x_n)$ sind lineare Funktionen der Parameter $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$ und wegen der nicht verschwindenden Determinante voneinander linear unabhängig.

Setzen wir nun in der quadratischen Form

$$A_0 = A = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Phi(x_i)\ \Theta^2(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$l_i = \sqrt{\frac{\Phi(x_i)}{f'(x_i)}}\ \Theta(x_i)$$

so wird

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} l_i^2 = l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2 . \tag{4}$$

Unter den gemachten Voraussetzungen [$f(x) = 0$ besitzt keine mehrfachen Wurzeln; $\Phi(x)$ und $f(x)$ sind relativ prim] kann kein Glied der Reihe (4) identisch verschwinden.

Ist x_i irgend eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so wird l_i^2 positiv oder negativ ausfallen, je nachdem $\Phi(x_i)$ und $f'(x_i)$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

Bedeutet (x_1, x_2) ein imaginäres Wurzelpaar von $f(x) = 0$, so wird

$$l_1 = P + Q_i$$

und

$$l_2 = P - Q_i$$

und

$$l_1^2 + l_2^2 = 2\,(P^2 - Q^2),$$

das heißt: Besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ imaginäre Wurzeln, so gibt jedes solche Wurzelpaar einen Beitrag von einer Einheit sowohl zu der Anzahl der positiven, als auch zu der Anzahl der negativen Quadrate der quadratischen Form A.

Der Fall, daß A eine definite Form ist, kann also nur dann eintreten, wenn die Gleichung $f(x) = 0$ nur reelle, voneinander verschiedene Wurzeln hat, und ferner

$$\frac{\Phi(x_i)}{f'(x_i)}$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ das nämliche Vorzeichen besitzt.

Setzen wir speziell $\Phi(x) = f'(x)$, so ist

$$\frac{\Phi(x)}{f'(x_i)} = 1,$$

also positiv in jedem beliebigen Intervall, und A ist dann notwendigerweise eine positive Form, vorausgesetzt, daß $f(x) = 0$ nur reelle, verschiedene Wurzeln besitzt. Umgekehrt, ist A eine positive Form, so sind unter den gemachten Festsetzungen notwendigerweise sämtliche Wurzeln von $f(x) = 0$ reell und verschieden.

Wenn wir also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß A eine positive Form ist, so ist diese Bedingung auch notwendig und hinreichend dafür, daß $f(x) = 0$ nur reelle und verschiedene Wurzeln besitzt.

Berücksichtigen wir noch, daß c_0, c_1, c_2, ... für $\Phi(x) = f'(x)$ übergehen in die Potenzsummen s_0, s_1, s_2, ... der Wurzeln von $f(x) = 0$, wie wir zu Anfang unserer Betrachtung gezeigt haben, und bezeichnen wir

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \cdots s_v \\ s_1 & s_2 & s_3 \cdots s_{v+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ s_v & s_{v+1} & s_{v+2} \cdots s_{2v} \end{vmatrix} = D_v$$

so haben wir folgenden

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

lauter reelle, voneinander verschiedene Wurzeln besitzt, besteht darin, daß D_0, D_1, D_2, ..., D_{n-1} sämtlich positiv sind.

§ 4. Eine Bedingung von Laguerre.

(Oeuvres de Laguerre, t. I, p. 56—61.)

Eine weitere notwendige und hinreichende Bedingung für die Realität sämtlicher Wurzeln einer algebraischen Gleichung hat Laguerre aufgestellt.

Es sei

$$(1) \qquad f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n = 0$$

eine ganze, homogene Funktion $n$ten Grades bezüglich der Variabeln x und y mit reellen Koeffizienten.

Indem wir $z = \frac{x}{y}$ setzen, wird

$$(2) \qquad F(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Es ist dann

$$f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = y^n F(z).$$

Besitzt $z = \frac{x}{y}$ irgend einen reellen oder imaginären Wert, der in der Gauß'schen Zahlenebene durch den Punkt P dargestellt ist, so bezeichnen wir den Punkt $\overline{P}$, welcher den Wert

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta}$$

gleicherweise darstellt und durch die Gleichung

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

bestimmt ist, als den derivierten Punkt von P.

Es ist $$\zeta = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

und da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{n-1} f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = n\, y^{n-1} f\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} \cdot y^{n-1} f'\left(\frac{x}{y}\right)$$

ist, so wird

$$\zeta = -\frac{-z \cdot F'(z) + n\, F(z)}{F'(z)}$$

$$= z - n\frac{F(z)}{F'(z)}. \tag{3}$$

Die Lage des derivierten Punktes können wir uns geometrisch folgendermaßen veranschaulichen:

Fassen wir unter z einen genäherten Wert einer Wurzel der algebraischen Gleichung (2) auf, so wird nach der Newton'schen Methode ein besserer Näherungswert z' durch die Formel

$$z' = z - \frac{F(z)}{F'(z)}$$

gegeben.

Es seien nun z durch den Punkt P, sein derivierter Punkt ζ durch den Punkt $\overline{P}$ und der Näherungswert z', der sich nach der Newton'schen Methode ergibt, durch Q fixiert. Man gelangt dann zu $\overline{P}$, wenn man in der Richtung PQ, von P ausgehend, die Strecke PQ n-mal abträgt.

Gibt man in

$$z = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

wobei α, β, γ, δ ganz beliebige imaginäre Werte besitzen, dem Parameter t alle möglichen reellen Werte, so bildet die Gesamtheit der dafür resultierenden z, in der Gauß'schen Zahlenebene abgebildet, einen Kreis. Geben wir t zwei imaginäre Werte t_1 und t_2, so liegen die Bilder von z für diese beiden Werte auf der nämlichen oder entgegengesetzten Seite des

obigen Kreises, je nachdem die Koeffizienten der imaginären Teile von t_1 und t_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Wenn wir also in dem Ausdruck

$$z = \frac{t\,x - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}}{t\,y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}}, \tag{4}$$

wobei $z = \dfrac{x}{y}$ einen beliebig gewählten Wert haben kann, dem Parameter t sämtlich mögliche reelle Werte geben, bilden die sich dafür ergebenden Werte von z in der Gauß'schen Zahlenebene einen Kreis, der durch die beiden Punkte

$$z = \frac{x}{y} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$$

hindurchgeht, denn:

$$\text{für } t = \infty \text{ wird } z = \frac{x}{y} \text{ und}$$

$$\text{für } t = 0 \text{ wird } z = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}$$

Indem nun λ variiert, bekommen wir für die reellen Werte von t ein System von Kreisen, mit den früher durch P und $\overline{P}$ bezeichneten Grundpunkten.

Nun betrachten wir die Gleichung:

$$F(z) = F\left(\frac{t\,x - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}}{t\,y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}}\right) = 0 \tag{5}$$

oder in homogener Form geschrieben:

$$(6) \qquad f\left(t\,x - \lambda \frac{\partial f}{\partial y};\; t\,y + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0,$$

welche imaginäre Wurzeln zulasse. Entwickeln wir (6) nach Potenzen von t, so sehen wir, daß in der Gleichung

$$(7) \qquad A_0\,t^n + A_1\,t^{n-1} + A_2\,t^{n-2} + \cdots + A_n = 0$$

der Koeffizient der $(n-1)$ten Potenz von t wegfällt.

Es ist:

$$f(x+h;\; y+k) = f(x,y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot k\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,h^2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot k^2\right] + \cdots$$

und daher

$$f(x\,t+h;\; y\,t+k) = t^n f(x,y) + \frac{\partial\,[t^n f(x,y)]}{\partial\,(x\,t)}\,h + \frac{\partial\,[t^n f(x,y)]}{\partial\,(y\,t)}\cdot k + \cdots$$
$$= f(x,y)\cdot t^n + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot k\right] t^{n-1} + \cdots$$

Der Koeffizient von t^{n-1} ergibt sich für unsere Gleichung, indem wir setzen:

$$h = -\lambda\frac{\partial f}{\partial y}; \quad k = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Er wird also:

$$-\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

Da der Koeffizient der $(n-1)$ten Potenz von t verschwindet, muß auch die Summe der Wurzeln der Gleichung (7) verschwinden. Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung mit

$$t_1 = a_1 + b_1\,i$$
$$t_2 = a_2 + b_2\,i$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$t_n = a_n + b_n\,i$$

so muß also

$$\sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k i) = 0$$

und infolgedessen auch

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} b_k = 0$$

sein, d. h.: Sind imaginäre Wurzeln vorhanden, so gibt es notwendigerweise zwei solcher Wurzeln, deren Koeffizienten der imaginären Teile entgegengesetztes Vorzeichen haben, und wir können nun den Satz aufstellen:

Ist eine algebraische Gleichung $n$ten Grades gegeben, und legt man durch einen beliebig in der Ebene gewählten Punkt P und seinen derivierten Punkt $\overline{P}$ alle möglichen Kreise, so enthält jeder dieser Kreise, falls nicht sämtliche Wurzeln auf seiner Peripherie liegen, mindestens eine Wurzel der gegebenen Gleichung und in diesem Fall ist mindestens eine Wurzel der Gleichung außerhalb des Kreises gelegen.

Speziell wird also der Kreis über $P\overline{P}$ als Durchmesser zum mindesten eine Wurzel der gegebenen Gleichung enthalten.

Dies vorausgeschickt, können wir den Satz aufstellen:

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die algebraische Gleichung $n$ten Grades

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

nur reelle Wurzeln besitzt, besteht darin, daß jeder Punkt der Ebene und sein derivierter Punkt auf entgegengesetzten Seiten der Abszissenaxe liegen.

Nehmen wir an, es würden P und sein derivierter Punkt $\overline{P}$ auf der nämlichen Seite der Abszissenaxe liegen. Dann wäre es möglich, durch P und $\overline{P}$ einen Kreis zu legen, der ganz auf dieser Seite der Axe liegt. Da nun aber jeder Kreis über $P\overline{P}$ zum mindesten eine Wurzel der gegebenen Gleichung enthält, wäre diese notwendigerweise imaginär, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Umgekehrt, nehmen wir an $f(x) = 0$ besitze imaginäre Wurzeln. Nähert sich P einem Wurzelpunkt, so nähert sich auch $\overline{P}$ diesem Wurzelpunkt; und wenn wir P in genügender Nähe eines imaginären Wurzelpunktes wählen, so wird sich $\overline{P}$ diesem Punkt so stark genähert haben, daß auch $\overline{P}$ auf die gleiche Seite der Abszissenaxe zu liegen kommt, auf welcher P liegt.

II. Kapitel.

Näherungsmethoden zur Berechnung der Wurzeln.

§ 1. Bestimmung von Näherungswerten, die sich einer Wurzel von der nämlichen Seite nähern.

Die Methoden von Newton und Fourier, falls sie angewendet werden dürfen, sowie die Regula falsi bieten uns bequeme Mittel, um durch Näherungsverfahren ziemlich rasch die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebig genau zu bestimmen, vorausgesetzt, daß man schon einen, dem wahren Wert der Wurzel nahe gelegenen Ausgangswert bestimmt hat. Eine Methode zur Bestimmung eines solchen Ausgangswertes in dem Falle, da die Gleichung $f(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln besitzt, hat Laguerre gegeben. Dabei kann seine Methode, wie wir sehen werden, zur sukzessiven Berechnung von noch bessern Näherungswerten benutzt werden.

Es sei die algebraische Gleichung n ten Grades $f(x) = 0$ in der Form gegeben:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \tag{1}$$

Sie besitze lauter reelle Wurzeln, die mit $x_1; x_2; \ldots; x_n$ bezeichnet sein mögen, und die nicht alle einander gleich sind.

Es ist dann:

$$f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

und $\log f(x) = \log a_0 + \log(x - x_1) + \log(x - x_2) + \cdots + \log(x - x_n)$

$$\frac{d}{dx}[\log f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \cdots + \frac{1}{x - x_n}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - x_i} \tag{2}$$

Indem wir in (2) der Variabeln x einen Wert geben, der genügend dicht bei einer beliebigen Wurzel x_k der gegebenen Gleichung (1) liegt, wird $\frac{1}{x - x_k}$ sehr groß im Verhältnis zu den andern Gliedern der Summe (2); es ist dann

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cong \frac{1}{x - x_k},$$

wobei das Zeichen $\cong$ angenähert gleich bedeutet, oder

$$x_k = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

und wir erhalten so die Newton'sche Näherungsmethode. Laguerre ist in seiner Untersuchung nicht von der Gleichung (2) ausgegangen, sondern von der Gleichung (3), die wir erhalten, indem wir (2) nach x differenzieren.

$$\frac{f'^2 - ff''}{f^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{x - x_i}\right)^2. \tag{3}$$

Bezeichnet x_k wieder irgend eine der Wurzeln der Gleichung (1), so ist:

$$\left(\frac{1}{x - x_k}\right)^2 < \frac{f'^2 - ff''}{f^2}$$

und

$$(x - x_k) > \frac{f}{\pm\sqrt{f'^2 - ff''}},$$

das heißt: Wählen wir einen beliebigen Punkt x auf der Abszissenaxe, und tragen von ihm aus nach links und rechts

eine Strecke ab, deren Länge gleich dem absoluten Betrag von $\frac{f}{\sqrt{f'^2 - ff''}}$ ist, und bezeichnen wir die so erhaltenen Endpunkte mit A und B, so liegt im Intervall $A \rightarrowtail B$ keine Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$. Die beiden Werte A und B geben uns je einen Näherungswert der unmittelbar unter x und der unmittelbar über x gelegenen Wurzel von (1).

Wir treffen nun folgende Festsetzung: Haben zwei Größen A und B die Eigenschaft, daß sämtliche Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ nur in einem der Intervalle $A \rightarrowtail B$ und $B \rightarrowtail A$ liegen, während also das andere Intervall keine Wurzel dieser Gleichung enthält, so sagen wir, daß A und B die Wurzeln der gegebenen Gleichung eingrenzen.

Enthält hingegen jedes der Intervalle $A \rightarrowtail B$ und $B \rightarrowtail A$ zum mindesten eine Wurzel der Gleichung, so sagen wir, daß A und B die Wurzeln dieser Gleichung trennen.

Zu einer allgemeinern Beziehung, als der soeben abgeleiteten, gelangen wir, indem wir von der Identität ausgehen

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\xi - x_i}{x - x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{[(\xi - x) + (x - x_i)]^2}{(x - x_i)^2}, \tag{4}$$

wobei ξ eine beliebige, reelle Größe bedeutet.

Es ist:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{[(\xi - x) + (x - x_i)]^2}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(\xi - x)^2 + (x - x_i)^2 + 2(\xi - x)(x - x_i)}{(x - x_i)^2}$$

$$= (\xi - x)^2 \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{1}{x - x_i}\right)^2 + 2(\xi - x) \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{x - x_i} + n$$

$$= (\xi - x)^2 \cdot \frac{f'^2 - ff''}{f^2} + 2(\xi - x) \cdot \frac{f'}{f} + n$$

$$= \frac{n(\xi - x)^2 (f'^2 - ff'') + 2n(\xi - x) ff' + n^2 f^2}{n \cdot f^2}$$

$$= \frac{[nf + (\xi - x) f']^2 + (\xi - x)^2 [(n-1) f'^2 - nff'']}{nf^2}. \tag{5}$$

Zur Umformung von (5) führen wir die homogene Funktion $f(x, y)$ ein. Wir erhalten ihre inhomogen geschriebene Form $f(x)$, indem wir in der homogen geschriebenen Form $y = 1$ setzen. Es möge in der Folge immer $y = 1$ gesetzt sein, sodaß also

$$f(x, y) = f(x, 1) = f(x)$$

ist. Dann wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = n f - x f' \qquad \text{und daher}$$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = (\xi - x) f' = n f. \tag{6}$$

Die Hesse'sche Form H von $f(x, y)$ ist definiert durch den Ansatz:

$$H = \frac{-1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{d x \cdot \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

und ergibt:

$$= -\frac{1}{n-1} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \right]$$

$$= -\frac{1}{n-1} \{ f'' [n(n-1) f - 2(n-1) x f' + x^2 f''] - (n-1)^2 f'^2 - x^2 f''^2 + 2x(n-1) f' f'' \}$$

$$= -\frac{1}{n-1} [n(n-1) f f'' - (n-1)^2 f'^2]$$

$$H = (n-1) f'^2 - n f f''. \tag{7}$$

Vermittelst der Relationen (6) und (7) geht die Gleichung (5) über in

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\xi - x_i}{x - x_i} \right)^2 = \frac{\left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + (\xi - x)^2 H}{n f^2}. \tag{8}$$

Die beiden Seiten obiger Gleichung sind infolge der gemachten Voraussetzung über die Wurzeln von $f(x) = 0$ wesentlich positiv. Wir bezeichnen ihren gemeinsamen Wert mit P und bestimmen nun eine Größe X durch die quadratische Gleichung

$$(9) \qquad P = \left(\frac{\xi - X}{x - X}\right)^2 \text{ oder}$$

$$(9') \qquad \varphi = P(x - X)^2 - (\xi - X)^2 = 0,$$

wobei ξ einen beliebigen, reellen Wert haben kann.

Die beiden Wurzeln X' und X'' der Gleichung (9') sind reell und über ihre Lage können wir folgendes erkennen:

Ersetzen wir X durch den Wert irgend einer Wurzel der Gleichung (1), so geht

$$\left(\frac{\xi - X}{x - X}\right)^2 \text{ über in } \left(\frac{\xi - x_i}{x - x_i}\right)^2,$$

also in ein Glied der Summe (8). Da sämtliche Glieder dieser Summe positiv sind, so ist

$$\left(\frac{\xi - x_i}{x - x_i}\right)^2 < P \text{ für } i = 1, 2, \cdots, n.$$

und $$\varphi = P(x - x_i)^2 - (\xi - x_i)^2 > 0.$$

Setzen wir hingegen $X = x$, so wird

$$\varphi = -(\xi - x_i)^2,$$

also sicher negativ.

Daraus können wir nun folgende Schlüsse ziehen:

Wir denken uns die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, entsprechend ihren numerischen Werten, als Punkte einer Geraden fixiert, ebenso den Punkt x. X betrachten wir als einen variabeln Punkt auf dieser Geraden.

Fällt X mit x zusammen, so hat φ einen negativen Wert. Wandert nun X von x aus nach beiden Seiten, so passiert

die Funktion φ eine Nullstelle, bevor X mit der unmittelbar über oder unmittelbar unter x gelegenen Wurzel zusammenfällt, da dann φ einen positiven Wert besitzt. Die beiden Wurzeln der Gleichung (9'), die wir mit X' und X'' bezeichnet hatten, müssen also in dem Intervall zweier aufeinanderfolgender Wurzeln der Gleichung (1) liegen, in welchem auch x gelegen ist. Sie sind aber den unmittelbar über, resp. unter x gelegenen Wurzeln näher als der Punkt x.

Insbesondere folgt daraus, daß, wenn x größer ist als die größte der Wurzeln von $f(x) = 0$, oder kleiner ist als die kleinste dieser Wurzeln, die beiden Größen X' und X'' eine obere und untere Grenze der Wurzeln von $f(x) = 0$ bilden.

Bezeichnen wir mit α und β zwei aufeinanderfolgende Wurzeln der Gleichung (1), und ist x ein Punkt im Innern des Intervalles $\alpha \dashv \beta$, so sind in der Reihe

$$\alpha,\ X',\ x,\ X'',\ \beta$$

die Glieder geordnet nach zunehmenden, resp. abnehmenden Werten, je nachdem α die kleinere oder größere Wurzel ist als β.

Diese Eigenschaft besteht, was für einen reellen Wert der willkürlich gewählte Punkt ξ haben mag. Es wird zwar die Lage der beiden Wurzelpunkte X' und X'' von der Wahl von ξ abhängig sein, immer aber wird von den beiden Punkten X' und X'' der eine im Intervall $\alpha \dashv x$, der andere im Intervall $x \dashv \beta$ liegen.

Fassen wir in der Gleichung (9') X als einen gegebenen Punkt auf, so ist diese Gleichung quadratisch in Bezug auf ξ. Jedem Punkt X entsprechen dann zwei Lagen von ξ. Es können aber nur solche Werte von X' und X'' in Betracht kommen, für welche die Gleichung (9') reelle Wurzeln liefert, also die Diskriminante bezüglich ξ in dieser Gleichung positiv oder höchstens gleich Null ist. Den Grenzfall erhalten wir, indem wir diese Diskriminante gleich Null setzen.

Die Gleichung (9′), als quadratische Gleichung von ξ angesehen, lautet:

$$(10)\quad \xi^2\left[\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+H\right)(X-x)^2}{nf^2}-1\right]+2\xi\left[\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-xH\right)(X-x)^2}{nf^2}+X\right]+\left[\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+x^2H\right)(X-x)^2}{nf^2}-X^2\right]=0.$$

Gebrauchen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=f_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{1,1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{2,2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\cdot\partial y}=f_{1,2}=f_{2,1},$$

so ist die Diskriminante von (10):

$$D=\left[\frac{f_{1,2}-xH}{nf^2}(X-x)^2+X\right]^2-\left[\frac{f_{1,1}+H}{nf^2}(X-x)^2-1\right]\cdot\left[\frac{f_{2,2}+x^2H}{nf^2}(X-x)^2-X^2\right].$$

Soll D verschwinden, so muß

$$\frac{f_{1,2}\cdot f_{1,2}-2xf_{1,2}H+x^2H}{n^2f^4}(X-x)^4+2X\frac{f_{1,2}-xH}{nf^2}(X-x)^2+X^2$$
$$=\frac{f_{1,1}\cdot f_{2,2}+x^2f_{1,1}H+f_{2,2}H+x^2H^2}{n^2f^4}(X-x)^4-\frac{f_{2,2}+x^2H}{nf^2}(X-x)^2$$
$$-X^2\frac{f_{1,1}+H}{nf^2}(X-x)^2+X^2$$

sein, oder

$$\frac{(X-x)^2}{nf^2}[-(x\cdot f_1+f_2)^2H]+H(X-x)^2+(Xf_1+f_2)^2=0.$$

Es ist

$$x \cdot f_1 + f_2 = x f' + n f - x f' = n f$$

und daher

$$(X \cdot f_1 + f_2)^2 = (n-1)(X-x)^2 H$$

und

$$X \cdot f_1 + f_2 = \pm (X-x)\sqrt{(n-1) H} \tag{11}$$

Indem wir in (11) $x = \infty$ setzen, werden wir zwei Werte X' und X'' erhalten, zwischen denen sämtliche Wurzeln der gegebenen Gleichung (1) liegen, das heißt, wir haben eine obere und eine untere Grenze der Wurzeln dieser Gleichungen bestimmt.

Um die Bestimmung dieser Grenzen durchzuführen, müssen wir noch die Hesse'sche Form der Funktion $f(x)$ berechnen, die in der Form

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

gegeben sein möge.

Es wird

$$\begin{aligned} H &= (n-1) f'^2 - n f f'' \\ &= (n-1)[n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \cdots]^2 \\ &\quad - n [a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots][n(n-1) a_0 x^{n-2} \\ &\qquad + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3) a_2 x^{n-4} + \cdots] \end{aligned}$$

Wir brauchen zur Bestimmung der Grenzen der Wurzeln nur den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in H, welche eine Funktion höchstens $(2n-4)$ ten Grades ist.

$$\begin{aligned} H &= \{(n-1)[(n-1)^2 a_1^2 + 2n(n-2) a_0 a_2] \\ &\qquad - n(n-2)(n-3) a_0 a_2 - n(n-1)(n-2) a_1^2 \\ &\qquad - n^2 (n-1) a_0 a_2\} x^{2n-4} + \cdots \\ &= [(n-1) a_1^2 - 2n a_0 a_2] x^{2n-4} + \cdots \end{aligned}$$

Setzen wir nun in (11) $x = \infty$, so wird

$$n a_0 X = -a_1 \pm \sqrt{(n-1)[(n-1) a_1^2 - 2n a_0 a_2]} \tag{12}$$

Da H eine positive Form ist, sind die beiden Wurzeln X' und X'' dieser Gleichung reell, und sie geben uns eine obere und untere Grenze der Wurzeln von (1).

Kehren wir wieder zur Gleichung (11) zurück und lassen x beliebig.

Es ist:

$$X f_1 + f_2 = (X - x) f' + n f$$

und somit

$$(X - x) f' + n f = \pm (X - x) \sqrt{(n-1) H}$$

oder nach $(X - x)$ aufgelöst und für

$$H = (n-1) f'^2 - n f f''$$

gesetzt

$$(13) \quad \begin{cases} X - x = \dfrac{n f}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1) f f''}} \\ \text{oder auch} \\ X = x + \dfrac{n f}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1) f f''}}. \end{cases}$$

Diese Gleichung besitzt die beiden reellen Wurzeln X' und X'' und sagt folgendes:

Ist x ein beliebiger, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln α und β der Gleichung $f(x) = 0$, gewählter Wert, so liegt von den beiden Wurzeln X' und X'' die eine im Intervall $\alpha \dots x$, die andere im Intervall $x \dots \beta$; und zwar liegt von den beiden Werten X' und X'' der eine näher bei α, der andere näher bei β als der willkürlich gewählte Wert x, aber beide noch innerhalb des Intervalles $\alpha \dots \beta$.

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$\frac{n f}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1) f f''}}$$

als die Korrektion, so wird diese positiv oder negativ sein müssen, je nachdem wir, von x ausgehend, die nächst obere oder nächst untere Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ berechnen wollen. Wir müssen daher die Quadratwurzel, die im Nenner

auftritt, entsprechend diesen beiden Fällen, mit dem gleichen oder dem entgegengesetzten Vorzeichen von f nehmen.

Haben wir durch die Formel (13) ein erstes Paar von Näherungswerten X' und X'' gefunden, und wobei X' die kleinere Wurzel sein möge, so können wir, indem wir X' resp. X'' als neue Ausgangswerte wählen, in gleicher Weise einen noch bessern Näherungswert der nächst kleinern, resp. nächst größern Wurzel der Gleichung (1) bestimmen. Wir können aber auch zur bequemern Berechnung an Stelle des ersten Näherungswertes einen geeigneten zwischen X' und x, resp. zwischen x und X'' gelegenen Wert nehmen.

Diese Methode von Laguerre besitzt den Vorteil, stets anwendbar zu sein und gute Näherungswerte zu liefern; sie hat aber den Nachteil, daß man kein Maß besitzt für den Fehler des berechneten Näherungswertes bezüglich des wahren Wertes der Wurzel.

[Anmerkung: Durch eine von der soeben besprochenen, verschiedenen Untersuchung ist Charles Hermite auf direkterem Wege auch zu dem von Laguerre gefundenen Resultat gelangt. (Oeuvres de Laguerre, t. I, p. 461—468.)]

Wie gut die nach der Laguerre'schen Methode berechneten Näherungswerte sich den wahren Werten der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nähern, erkennen wir am besten an einem Zahlenbeispiel.

Wir betrachten die Gleichung

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 115x^3 + 260x^2 + 2964x - 6048 = 0,$$

welche lauter reelle Wurzeln besitzt, die im Intervall $-10 \dots + 10$ gelegen sind, da die Reihe

$$\begin{aligned} f\ (-10) &= -14688 \\ f'\ (-10) &= +21264 \\ f''\ (-10) &= -14980 \\ f'''\ (-10) &= +\ 5790 \\ f^{IV}\ (-10) &= -\ 1248 \\ f^{V}\ (-10) &= +\ 120 \end{aligned}$$

5 Vorzeichenwechsel aufweist, während die Reihe

$$\begin{aligned} f\ (+10) &= +14592 \\ f'\ (+10) &= +15664 \\ f''\ (+10) &= +11220 \\ f'''\ (+10) &= +4830 \\ f^{IV}\ (+10) &= +1152 \\ f^{V}\ (+10) &= +120 \end{aligned}$$

deren keine mehr enthält.

Als Ausgangswert zur näherungsweisen Bestimmung der kleinsten Wurzel wählen wir -10. Die Korrektion wird dann positiv sein, die Quadratwurzel ist also mit dem Vorzeichen von f zu nehmen.

$$X = x + \frac{n f}{-f' \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2 - n(n-1) f f''}}$$

$$X_1 = -10 + \frac{5 \cdot (-14688)}{-21264 - \sqrt{16 \cdot 21264^2 - 20(-14688)(-14980)}} = -10 + 0{,}985\ldots$$

$$= -9{,}014\ldots$$

Als Ausgangswert zur Bestimmung eines zweiten Näherungswertes wählen wir $-9{,}014$. Wir dürfen $X_1 = -9{,}014$ setzen, da $f(x)$ im Intervall $-9{,}014 \dashv -9{,}015$ das Vorzeichen nicht wechselt.

Dadurch erhalten wir als zweiten Näherungswert

$$X_2 = -9{,}014 + \frac{5 \cdot f(-9{,}014)}{-f'(-9{,}014) - \sqrt{16 \cdot [f'(-9{,}014)]^2 - 20 \cdot f(-9{,}014) \cdot f''(-9{,}014)}}$$

$$= -9{,}014 + \frac{5 \cdot (-126{,}6235)}{-9113{,}5644 - \sqrt{16 \cdot 9113{,}5644^2 - 20 \cdot 126{,}6235 \cdot 9858{,}5388}}$$

$$= -9{,}014 + 0{,}0139996\ldots = -9{,}0000003\ldots$$

Der zweite Näherungswert

$$X_2 = x_1 = -9{,}0000003\ldots$$

stimmt mit dem wahren Wert der Wurzel, welcher (-9) ist, auf 6 Dezimalstellen überein.

Da die Reihe

$$\begin{aligned} f\ (0) &= -\ 6048 \\ f'\ (0) &= +\ 2964 \\ f''\ (0) &= +\ 520 \\ f'''\ (0) &= -\ 690 \\ f^{IV}(0) &= -\ 48 \\ f^{V}\ (0) &= +\ 120 \end{aligned}$$

noch 3 Vorzeichenwechsel besitzt, liegt eine Wurzel im Intervall $-9 \dashv 0$, und wir benutzen den Wert 0 als Ausgangspunkt zur Berechnung der unmittelbar unter 0 und der unmittelbar über 0 gelegenen Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Es wird

$$X = 0 + \frac{5 \cdot (-\ 6048)}{-\ 2964 \pm \sqrt{16 \cdot 2964^2 + 20 \cdot 6048 \cdot 520}}$$

$$= 0 + \frac{-\ 30240}{-\ 2964 \pm 14264}$$

$$\underline{X_1 = 1{,}75\cdots} \qquad \underline{X'_1 = -\ 2{,}67\cdots}$$

Der Wert $X'_1 = -\ 2{,}6$, als neuer Ausgangswert benutzt, ergibt:

$$X'_2 = -\ 2{,}6 + \frac{5 \cdot f(-\ 2{,}6)}{-\ f'(-\ 2{,}6) \pm \sqrt{16 \cdot [f'\ (-\ 2{,}6)]^2 - 20 \cdot f\ (-\ 2{,}6) \cdot f''\ (-\ 2{,}6)}}$$

$$= -\ 2{,}6 + \frac{5\ (-\ 10185{,}77)}{351{,}104 + \sqrt{16 \cdot 351{,}104^2 + 20 \cdot 10185{,}77 \cdot 1800{,}29}}$$

$$= -\ 2{,}6 - 2{,}6\cdot\cdot = \underline{-\ 5{,}2\cdots}$$

Ein weiterer Näherungswert ergibt sich folgendermaßen:

$$X'_3 = -\ 5{,}2 + \frac{5 \cdot f(-\ 5{,}2)}{-\ f'(-\ 5{,}2) \pm \sqrt{16 \cdot [f'\ (-\ 5{,}2)]^2 - 20 \cdot f(-\ 5{,}2) \cdot f''\ (-\ 5{,}2)}}$$

$$= -\ 5{,}2 + \frac{5\ (-\ 3524{,}84352)}{4288{,}128 + \sqrt{16 \cdot 4288{,}128^2 + 20 \cdot 3524{,}84352 \cdot 646{,}88}}$$

$$= -\ 5{,}2 - 0{,}775\cdots = \underline{-\ 5{,}975\cdots}$$

Indem wir $X'_3 = -5{,}975$ als Ausgangswert nehmen, erhalten wir:

$$X'_4 = -5{,}975 + \frac{5 \cdot f(-5.975)}{-f'(-5{,}975) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(-5{,}975)]^2 - 20 \cdot f(-5{,}975) \cdot f''(-5{,}975)}}$$

$$= -5{,}975 + \frac{5\,(-109{,}359184365234375)}{4380{,}552623046875 + \sqrt{16 \cdot 4380{,}5\cdot\cdot^2 - 20 \cdot 109{,}35\cdot\cdot 480{,}2896875}}$$

$$= -5{,}975 - 0{,}0249989\cdot\cdot = \underline{-5{,}9999989\cdot\cdot},$$

d. h. einen Wert, welcher vom wahren Wert der Wurzel, der -6 ist, um weniger als 0,0000011 . . differiert.

$X_1 = 1{,}75$ als Ausgangswert zur Berechnung der unmittelbar über 0 gelegenen Wurzel benutzt, ergibt:

$$X_2 = 1{,}75 + \frac{5 \cdot f(1{,}75)}{-f'(1{,}75) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(1{,}75)]^2 - 20 \cdot f(1{,}75) \cdot f''(1{,}75)}}$$

$$= 1{,}75 + \frac{5\,(-683{,}47285)}{-2821{,}457 - \sqrt{16 \cdot 2821{,}457^2 - 20 \cdot 683{,}42285 \cdot 653{,}8125}}$$

$$= 1{,}75 + 0{,}2493\cdot\cdot = \underline{1{,}9993\cdot\cdot}$$

Der genaue Wert der Wurzel ist 2.

Da im Intervall $2 - 3$ keine Wurzel liegt, berechnen wir nun, von 3 als Ausgangswert ausgehend, die zunächst über 3 liegende Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

$$X_1 = 3 + \frac{5 \cdot f(3)}{-f'(3) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(3)]^2 - 20 \cdot f(3) \cdot f''(3)}}$$

$$= 3 + \frac{5 \cdot 2160}{-1608 + \sqrt{16 \cdot 1608^2 + 20 \cdot 2160 \cdot 1226}}$$

$$= 3 + 1{,}3\cdot\cdot = \underline{4{,}3\cdot\cdot}$$

Als neuen Ausgangswert wählen wir der einfacheren Rechnung wegen

$X'_1 = 4$. Dann folgt:

$$X_2 = 4 + \frac{5 \cdot f(4)}{-f'(4) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(4)]^2 - 20 \cdot f(4)\, f''(4)}}$$

$$= 4 + \frac{5 \cdot 3120}{-292 + \sqrt{16 \cdot 292^2 + 20 \cdot 3120 \cdot 1344}}$$

$$= 4 + 1{,}74\cdot\cdot = \underline{5{,}74\cdot\cdot}$$

$X'_2 = 5{,}7$ gesetzt, ergibt:

$$X_3 = 5{,}7 + \frac{5 \cdot f(5{,}7)}{-f'(5{,}7) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(5{,}7)]^2 - 20 \cdot f(5{,}7) \cdot f''(5{,}7)}}$$

$$= 5{,}7 + \frac{5 \cdot 1902{,}72537}{1484{,}5935 + \sqrt{16 \cdot 1484{,}5935^2 + 20 \cdot 1902{,}72537 \cdot 488{,}9}}$$

$$= 5{,}7 + 1{,}07\cdot\cdot = \underline{6{,}77\cdot\cdot}$$

$$X_4 = 6{,}77 + \frac{5 \cdot f(6{,}77)}{-f'(6{,}77) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(6{,}77)]^2 - 20 \cdot f(6{,}77) \cdot f''(6{,}77)}}$$

$$= 6{,}77 + \frac{5 \cdot 271{,}752735}{1306{,}986764 + \sqrt{16 \cdot 1306{,}9\cdot\cdot^2 - 20 \cdot 271{,}7\cdot\cdot\cdot 954{,}48506}}$$

$$= 6{,}77 + 0{,}225\cdot\cdot\cdot = \underline{6{,}995\cdot\cdot}$$

Indem wir 6,995 als Ausgangswert wählen, finden wir:

$$X_5 = 6{,}995 + \frac{5 \cdot f(6{,}995)}{-f'(6{,}995) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(6{,}995)]^2 - 20 \cdot f(6{,}995) \cdot f''(6{,}995)}}$$

$$= 6{,}995 + \frac{5 \cdot 5{,}217135145621875}{1046{,}846091496875 + \sqrt{16 \cdot 1046{,}8\cdot\cdot^2 - 20 \cdot 5{,}217\cdot\cdot\cdot 1364{,}4398975}}$$

$$= 6{,}995 + 0{,}00499994\cdot\cdot = \underline{6{,}99999994\cdot\cdot}$$

Der wahre Wert der Wurzel ist 7.

Die letzte Wurzel erhalten wir in der unmittelbar unter 10 liegenden Wurzel.

$$X_1 = 10 + \frac{5 \cdot f(10)}{-f'(10) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(10)]^2 - 20 \cdot f(10) \cdot f''(10)}}$$

$$= 10 + \frac{5 \cdot 14592}{-15664 - \sqrt{16 \cdot 15664^2 - 20 \cdot 14592 \cdot 11220}}$$

$$= 10 - 1{,}7\cdot\cdot = \underline{8{,}2\cdot\cdot}$$

$$X_2 = 8{,}3 \pm \frac{5 \cdot f(8{,}3)}{-f'(8{,}3) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(8{,}3)]^2 - 20 \cdot f(8{,}3) \cdot f''(8{,}3)}}$$

$$= 8{,}3 + \frac{5 \cdot 607{,}83723}{-2667{,}8145 - \sqrt{16 \cdot 2667{,}8145^2 - 20 \cdot 607{,}83723 \cdot 4575{,}38}}$$

$$= 8{,}3 - 0{,}295\cdot\cdot = \underline{8{,}004\cdot\cdot}$$

$$X_3 = 8{,}004 + \frac{5 \cdot f(8{,}004)}{-f'(8{,}004) \pm \sqrt{16 \cdot [f'(8{,}004)]^2 - 20 \cdot f(8{,}004) \cdot f''(8{,}004)}}$$

$$= 8{,}004 + \frac{5 \cdot 5{,}741661513729024}{-1442{,}83813772928 - \sqrt{16 \cdot 1442{,}8\cdots^2 - 20 \cdot 5{,}74\cdots 3715{,}07129725}}$$

$$= 8{,}004 - 0{,}00399998\cdots = 8{,}00000001\cdots$$

Die durch Näherungsmethode berechneten Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 115x^3 + 260x^2 + 2964x - 6048 = 0$$

sind somit

$$\begin{aligned} x_1 &= -9{,}0000003\cdots \quad (-9); \\ x_2 &= -5{,}9999989\cdots \quad (-6), \\ x_3 &= \quad 1{,}9993\cdots \qquad\quad (2); \\ x_4 &= \quad 6{,}99999994\cdots \quad (7); \\ x_5 &= \quad 8{,}00000001\cdots \quad (8); \end{aligned}$$

wobei die eingeklammerten Zahlen die genauen Werte sind.

In einem zweiten Beispiel berechnen wir die größte Wurzel der $n$ten Kugelfunktion.

$$P_n(x) = 0$$

Die $n$te Kugelfunktion lautet nach Jakobi

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [x^2 - 1]^n$$

oder auch

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - + \cdots \right]$$

und die Gleichung

$$P_n(x) = 0$$

besitzt n reelle, voneinander verschiedene Wurzeln, die sämtlich im Intervall $-1 \dots +1$ gelegen sind. Wählen wir als

Ausgangswert $x = 1$, so erhalten wir für X einen Wert, der unter $x = 1$, aber noch immer über der größten Wurzel von $P_n(x) = 0$ gelegen ist.

Aus der Rekursionsformel

$$(1 - x^2)\, P_n'(x) + n\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) = 0$$

folgt für $x = 1$

$$P_n(1) = P_{n-1}(1)$$

und indem wir für n setzen $(n-1)$, $(n-2)$, . . ., folgt

$$P_{n-1}(1) = P_{n-2}(1) = \cdots = P_2(1) = P_1(1) = 1.$$

Aus der Differentialgleichung der $n$ten Kugelfunktion

$$(1 - x^2)\, P_n''(x) - 2\, x\, P_n'(x) + n(n+1)\, P_n(x) = 0$$

folgt für $x = 1$

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Durch einmalige Differentiation obiger Gleichung erhalten wir:

$$(1-x^2)\, P_n'''(x) - 2\, x\, P_n''(x) - 2\, P_n'(x) - 2\, x\, P_n''(x) + n(n+1)\, P_n'(x) = 0$$

und für $x = 1$ gesetzt, ergibt sich:

$$4\, P_n''(1) = \left[n(n+1) - 2\right]\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

und

$$P_n''(1) = \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{8}.$$

Indem wir die berechneten Werte: $P_n(1)$; $P'_n(1)$; $P''_n(1)$ in die Formel (13) einsetzen, wird:

$$X = 1 + \frac{n}{-\frac{n(n+1)}{2} - \sqrt{\frac{(n-1)^2 n^2 (n+1)^2}{4} - \frac{n^2 (n-1)^2 (n+1)(n+2)}{8}}}$$

$$= 1 - \frac{2}{(n+1) + (n-1)\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Setzen wir, um bestimmte Beispiele durchzuführen, n der Reihe nach 1, 2, . . ., 7.

[Die in eckiger Klammer stehenden Werte sind die von Gauß auf 4 Dezimalen berechneten Werte der Wurzeln.]

$$n = 1;\ X = 0$$

$$n = 2;\ X = 1 - \frac{2}{3 + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735.$$

Diese beiden Näherungswerte stimmen mit dem wahren Wert der Wurzel überein.

$$n = 3;\ X = 1 - \frac{1}{2 + \sqrt{6}} = 0{,}7752\cdot\cdot[0{,}7746]$$

$$n = 4;\ X = 1 - \frac{2}{5 + 3\sqrt{10}} = 0{,}8619\cdot\cdot[0{,}8611]$$

$$n = 5;\ X = 1 - \frac{1}{3 + 2\sqrt{15}} = 0{,}9069\cdot\cdot[0{,}9062]$$

$$n = 6;\ X = 1 - \frac{2}{7 + 5\sqrt{21}} = 0{,}9331\cdot\cdot[0{,}9325]$$

$$n = 7;\ X = 1 - \frac{1}{4 + 3\sqrt{28}} = 0{,}9496\cdot\cdot[0{,}9491]$$

§ 2. Bestimmung von Näherungswerten, die sich einer Wurzel von beiden Seiten nähern.

Eine zweite Methode von Laguerre zur Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit lauter reellen Wurzeln durch Näherungsverfahren erhalten wir durch folgende Betrachtung:

Gleicherweise wie man eine Reihe von Intervallen bestimmen kann, die keine Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ enthalten, kann man auch eine Reihe von Intervallen bestimmen, die zum mindesten eine Wurzel dieser Gleichung enthalten, während zum mindesten eine Wurzel außerhalb des Intervalles liegt.

Wir nehmen an, $f(x) = 0$ besitze lauter reelle Wurzeln, die nicht alle einander gleich sind und behaupten:

Ist x ein beliebig gewählter, reeller Wert, und genügen die beiden Größen ξ und ξ', von denen die eine einen willkürlich gewählten Wert hat, der Gleichung

(1) $(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') + (\xi + \xi' - 2x) ff' + nf^2 = 0,$

so trennen die beiden Größen ξ und ξ' die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Die Gleichung (1) kann umgeformt werden, wie folgt:

$$n(\xi - x)(\xi' - x)(f'^2 - ff'') + n(\xi + \xi' - 2x) ff' + n^2 f^2 = 0$$

$$[nf + (\xi - x) f'][nf + (\xi' - x) f'] + (\xi - x)(\xi' - x) H = 0.$$

Zur Homogenisierung dieser Gleichung führen wir die Größen y, η und η' ein, deren Wert gleich der Einheit sein soll.

Es ist

$$nf - xf' = \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

und

$$f' = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Dadurch geht (1) über in

(2) $$\left[\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\right]\left[\xi' \frac{\partial f}{\partial x} + \eta' \frac{\partial f}{\partial y}\right] + \left[\xi \eta - x \eta\right]\left[\xi' \eta - x \eta'\right] H = 0.$$

Unterwerfen wir in dieser Gleichung, die nur Kovarianten der Form $f(x, y)$ enthält, die Größenpaare x, y; ξ, η und ξ', η' gleichzeitig derselben linearen Transformation, so bleibt die Gleichung (2) ungeändert. Wir können die allgemeinen Eigenschaften der Gleichung an einer speziellen Transformation studieren, z. B. an derjenigen, bei der die neuen Variabeln $x = \infty$ und $\xi' = 0$ werden.

Da wir H früher berechnet haben als

$$[(n-1) a_1^2 - 2n a_0 a_2] x^{2n-4} + \cdots$$

geht (2) dann über in

$$(\xi n a_0 + a_1) a_1 + (n-1) a_1^2 - 2 n a_0 a_2 = 0$$

und

$$\xi = \frac{2\left(\frac{a_2}{a_0}\right) - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)}.$$

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so ist

$$s_1 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - 2\frac{a_2}{a_0}$$

und somit

$$\xi = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{i=n} [(x_i - \xi) x_i] = 0. \tag{3}$$

Die Summe (3) kann nur verschwinden, wenn einzelne der Produkte $(x_i - \xi) x_i$ negativ und andere positiv sind, oder anders ausgedrückt, wenn einzelne der Wurzeln x_i im Intervall $0 \dots \xi$, und andere außerhalb dieses Intervalles liegen.

[Würde die gegebene Gleichung $f(x) = 0$ eine n-fache Wurzel besitzen, was wir ausgeschlossen haben, so müßte ξ notwendigerweise auch den Wert dieser Wurzel besitzen.]

Indem wir x einen bestimmten, reellen Wert geben, und für jeden reell gewählten Wert ξ den entsprechenden Wert ξ' aus der Gleichung (1) ermitteln, erhalten wir in den ver-

schiedenen Wertepaaren ξ, ξ' eine Punktinvolution, deren Doppelpunkte durch die Gleichung

$$\left(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + (\xi y - x \eta)^2 H = 0$$

geliefert werden.

Bezeichnen wir den Punkt der Axe, dessen Abszisse gleich x ist, mit m, so sei M der zugeordnete Punkt vom m und in der Zahlenebene fixiert als Repräsentant des Punktes mit den rechtwinkligen Koordinaten

$$x - \frac{n \cdot f \frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + H} \quad \text{als Abszisse}$$

(4)

und

$$- \frac{n \cdot f \sqrt{H}}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + H} \quad \text{als Ordinate.}$$

Wandert m auf der Abszissenaxe, so durchläuft der Punkt M in der Ebene eine Kurve C_M und wir behaupten:

Legt man durch irgend einen Punkt der Kurve C_M zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden, so trennen die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Abszissenaxe die Wurzeln der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$.

Die Gleichungen zweier beliebiger solcher Geraden durch einen Punkt der Kurve C_M lauten:

$$Y + \frac{nf\sqrt{H}}{f'^2 + H} = \mu \left[X - x + \frac{nff'}{f'^2 + H}\right]$$

und

$$Y + \frac{nf\sqrt{H}}{f'^2 + H} = -\frac{1}{\mu}\left[X - x + \frac{nff'}{f'^2 + H}\right]$$

und ihre Schnittpunkte mit der Abszissenaxe sind

$$X = \xi = \frac{nf\sqrt{H}}{f'^2 + H} \cdot \frac{1}{\mu} + x - \frac{nff'}{f'^2 + H}$$

und

$$X = \xi' = -\frac{nf\sqrt{H}}{f'^2 + H} \cdot \mu + x - \frac{nff'}{f'^2 + H}.$$

Sollen die beiden Schnittpunkte die Wurzeln von $f(x) = 0$ trennen, so müssen sie der Gleichung (1) genügen.

Bemerken wir noch, daß

$$f'^2 + H = n(f'^2 - ff'')$$

ist, so wird:

$$\left(\frac{1}{\mu} f\sqrt{H} - ff'\right)\left(-\mu f\sqrt{H} - ff'\right)$$

$$+ \left[f\sqrt{H}\left(\frac{1}{\mu} - \mu\right) - 2ff'\right]ff' + nf^2(f'^2 - ff'') = 0$$

$$-f^2 H + \mu(f^2 f'\sqrt{H} - f^2 f'\sqrt{H}) + \frac{1}{\mu}(-f^2 f'\sqrt{H} + f^2 f'\sqrt{H})$$

$$+ f^2 f'^2 - 2f^2 f'^2 + nf^2(f'^2 - ff'') = 0$$

$$0 = 0.$$

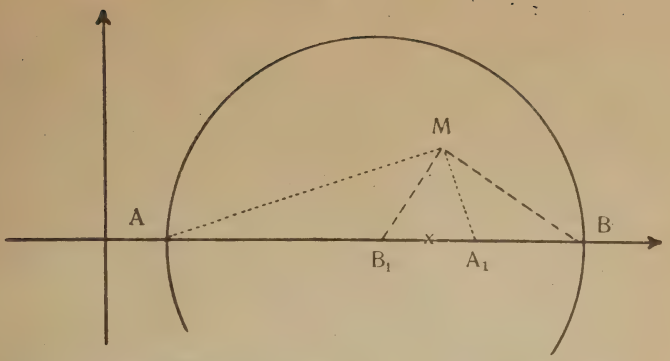
Die ausgesprochene Behauptung ist also in der Tat richtig.

Laguerre ist offenbar durch folgende Betrachtung zu diesem Satze gelangt:

Bilden die Punktepaare ξ, ξ', ξ_1, ξ'_1, . . . eine Involution auf einer Geraden, so gehen die über ξ, ξ', ξ_1, ξ'_1, . . . als Durchmesser konstruierten Kreise durch zwei feste Punkte. Im gegenwärtigen Falle ist M einer dieser beiden festen Punkte, der Spiegelpunkt von M bezüglich der Abszissenlinie der andere.

Nehmen wir nun an, wir hätten ein Intervall $A \frown B$ bestimmt, welches nur eine Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ enthält, und einen Punkt M, der durch die Beziehung (4) definiert ist, so gewählt, daß er in das Innere des Kreises über $\overline{AB}$ als Durchmesser fällt. Ziehen wir durch M die Senkrechten zu den Geraden AM und BM, so mögen die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Abszissenaxe mit A_1 und B_1 bezeichnet sein. Die Wurzel von $f(x) = 0$, welche im Intervall $A \frown B$ liegt, ist nach dem vorhergehenden auch in den Intervallen $A \frown A_1$ und $B \frown B_1$ enthalten und somit notwendigerweise im gemeinsamen Intervall $B_1 \frown A_1$.

Evans



Die beiden Werte A_1 und B_1 bilden ein erstes Paar von Näherungswerten der gesuchten Wurzel und sie werden umso näher bei der Wurzel liegen, je näher auch der Punkt M dieser Wurzel liegt, oder je kleiner die Ordinate von M ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Methode anwendbar ist, besteht darin, daß der Punkt M im Innern des Kreises über $\overline{AB}$ liegt.

Es wird immer möglich sein, solche Punkte zu finden, denn:

Nähert sich der früher mit m bezeichnete Punkt der Wurzel, so nähert sich der zugeordnete Punkt M von selbst dieser Wurzel; und ist m genügend nahe der Wurzel gelegen, so wird M sich dieser Wurzel so stark genähert haben, daß M in das Innere des Kreises über $\overline{AB}$ zu liegen kommt.

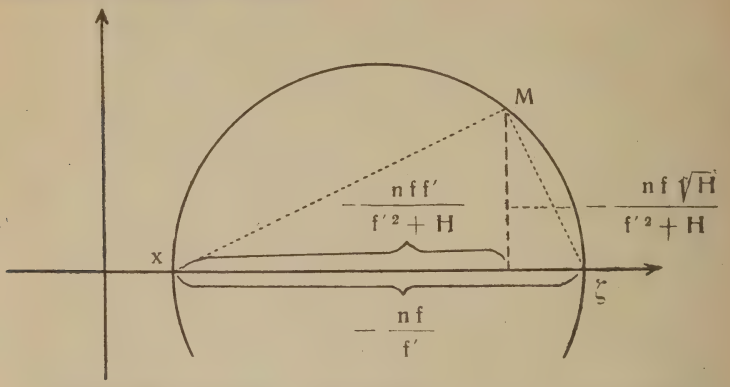
Um die Berechnung einer Wurzel durch Näherungswerte praktischer zu gestalten, hat Laguerre eine zur Anwendung bequemere notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt. Sie lautet:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Anwendbarkeit der besprochenen Methode ist die, daß sowohl der Punkt x, als auch sein derivierter Punkt

$$\xi = x - \frac{n f(x)}{f'(x)}$$

im Intervall $A \dots B$ liegen.

Wir können die Richtigkeit dieses Satzes leicht nachweisen, indem wir zeigen, daß der über $\overline{x\zeta}$ als Durchmesser beschriebene Kreis durch den x zugeordneten Punkt M hindurchgeht und somit die beiden Geraden Mx und $M\zeta$ aufeinander senkrecht stehen.



Damit M auf dem Kreis über $x\zeta$ liegt, muß bestehen:

$$\frac{n^2 f^2 H}{(f'^2+H)^2} - \frac{nff'}{f'^2+H}\, nf\left[\frac{1}{f'} - \frac{f'}{f'^2+H}\right] = 0$$

$$H - (f'^2+H) + f'^2 = 0$$

$$0 = 0,$$

das heißt: der Kreis über $x\zeta$ geht in der Tat durch M und der Satz ist richtig, denn der Kreis über $x\zeta$ liegt ganz im Innern des Kreises über $\overline{AB}$.

Dies vorausgeschickt, können wir folgenden Satz aussprechen, der uns eine Methode zur sukzessiven Berechnung der Wurzeln durch Näherungsverfahren liefert.

Satz: Es sei $A - B$ ein Intervall, welches nur die eine Wurzel ξ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ enthält und α_1 ein Punkt dieses Intervalles, so gewählt, daß der Punkt

$$\zeta_1 = \alpha_1 - n\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

ebenfalls im Intervall $A - B$ liegt. Es möge ferner,

nur um den Satz bestimmter formulieren zu können,

$$A < \alpha_1 < \zeta_1 < B$$

sein. Die Senkrechte durch den α_1 zugeordneten Punkt $M\alpha_1$ zu der Richtung $BM\alpha_1$ möge die Abszissenaxe im Punkte α_2 treffen; die Senkrechte durch $M\alpha_2$ zu der Richtung $BM\alpha_2$ schneide die Axe in α_3 u. s. f.

Indem wir so fortfahren, erhalten wir auf der Axe eine Reihe von Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, die sämtlich auf der gleichen Seite der gesuchten Wurzel liegen und sich dieser zugleich immer mehr nähern. Um eine Grenze für den Fehler zu haben, der besteht, indem wir bei einem bestimmten Glied α_n unsern Prozeß abbrechen, brauchen wir nur die Senkrechte durch den Punkt $M\alpha_{n-1}$ zur Geraden $AM\alpha_{n-1}$ zum Schnitt mit der Axe zu bringen. Ist β_n dieser Schnittpunkt, so liegt die gesuchte Wurzel ξ sowohl im Intervall $A \dashv \beta_n$, als auch im Intervall $\alpha_n \dashv B$ und daher notwendigerweise im gemeinsamen Intervall $\alpha_n \dashv \beta_n$.

Um für die rechnerische Durchführung eines Beispiels eine bequemere Anwendung zu erhalten, schlagen wir einen, von dem soeben beschriebenen, etwas verschiedenen Weg ein.

Es sei $A \dashv B$, gleich wie früher, ein Intervall, das nur die eine Wurzel ξ der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ enthält, und α_1 ein Punkt dieses Intervalles, so gewählt, daß auch der Punkt

$$\alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

in dieses Intervall fällt. Die Senkrechten durch den α zugeordneten Punkt M zu den Richtungen AM und BM schneiden die Axen in den Punkten A_1 und B_1, deren Abszissenwerte wir leicht ermitteln können, und zwischen denen die gesuchte Wurzel ξ liegt. Die Gleichungen der Geraden senkrecht zu den Richtungen AM und BM lauten:

$$G_1:\ Y+\frac{f(\alpha)\cdot\sqrt{H}}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}=-\frac{A-\alpha+\dfrac{f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}}{\dfrac{f(\alpha)\cdot\sqrt{H}}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}}$$

$$\cdot\left[X-\alpha+\frac{f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}\right]\text{ und}$$

$$G_2:\ Y-\frac{f(\alpha)\cdot\sqrt{H}}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}=-\frac{B-\alpha+\dfrac{f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}}{\dfrac{f(\alpha)\cdot\sqrt{H}}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}}$$

$$\cdot\left[X\alpha+\frac{f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}{f'^2(\alpha)-f(\alpha)\cdot f''(\alpha)}\right]$$

und ihre Schnittpunkte mit der Axe sind:

$$G_1:\ A_1=\alpha-\frac{ff'}{f'^2-ff''}+\frac{f^2[(n-1)f'^2-nff'']}{(\alpha-A)(f'^2-ff'')^2-ff'(f'^2-ff'')}$$

$$=\alpha+f\frac{f[(n-1)f'^2-nff'']\,[f'^2-ff'']-f'(\alpha-A)(f'^2-ff'')^2+ff'^2(f'^2-ff'')}{(\alpha-A)(f'^2-ff'')^3-ff'(f'^2-ff'')^2}$$

$$=\alpha+f(\alpha)\cdot\frac{(\alpha-A)f'(\alpha)-nf(\alpha)}{(\alpha-A)\left(f(\alpha)f''(\alpha)-f'^2(\alpha)\right)+f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}$$

und analog:

$$G_2:\ B_1=\alpha+f(\alpha)\cdot\frac{(\alpha-B)f'(\alpha)-nf(\alpha)}{(\alpha-B)\left(f(\alpha)\cdot f''(\alpha)-f'^2(\alpha)\right)+f(\alpha)\cdot f'(\alpha)}$$

Diese Betrachtung vorausgeschickt, erhalten wir folgenden

Satz: Gegeben ist eine Gleichung $n$ten Grades $f(x)=0$, die lauter reelle Wurzeln besitzt. Es sei $A \dashv B$ ein Intervall, das nur eine Wurzel ξ dieser Gleichung

enthält, und α_1 ein Punkt des Intervalles $A \dashv B$, so bestimmt, daß

$$\alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

ebenfalls in dieses Intervall fällt. Die gesuchte Wurzel ξ liegt dann im Intervall $B_1 \dashv A_1$, wobei A_1 und B_1 gegeben sind durch die Formeln:

$$(5)\begin{cases} A_1 = \alpha + f(\alpha)\cdot\dfrac{(\alpha - A)\,f'(\alpha) - nf(\alpha)}{(\alpha - A)\,(f(\alpha)\cdot f''(\alpha) - f'^2(\alpha)) + f(\alpha)\cdot f'(\alpha)} \\ B_1 = \alpha + f(\alpha)\cdot\dfrac{(\alpha - B)\,f'(\alpha) - nf(\alpha)}{(\alpha - B)\,(f(\alpha)\cdot f''(\alpha) - f'^2(\alpha)) + f(\alpha)\cdot f'(\alpha)} \end{cases}$$

Indem wir nun einen Punkt α_1, gelegen im Intervall $B_1 \dashv A_1$, so wählen, daß auch der Punkt

$$\alpha_1 - n\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$$

in dieses Intervall zu liegen kommt, erhalten wir durch die Formeln (5) ein zweites Paar von Näherungswerten A_2 und B_2, zwischen welchen die gesuchte Wurzel ξ liegt u. s. f.

Über die Genauigkeit, mit welcher die nach dieser Methode berechneten Näherungswerte mit den wahren Werten der Wurzeln übereinstimmen, können wir uns am besten an Hand eines Beispiels Aufschluß geben.

Die Gleichung 4ten Grades

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 21x^2 - 4x + 11 = 0$$

besitzt lauter reelle Wurzeln, von denen die kleinste im Intervall $-5 \dashv -1$ liegt, da die Reihe

$$\begin{aligned} f\ (-5) &= +\ 1631 \\ f'\ (-5) &= -\ 1444 \\ f''\ (-5) &= +\ 918 \\ f'''\ (-5) &= -\ 372 \\ f''''\ (-5) &= +\ 72 \end{aligned}$$

4 Vorzeichenwechsel besitzt, die Reihe

$$\begin{aligned} f\ (-1) &= -\ 1 \\ f'\ (-1) &= +\ 20 \\ f''\ (-1) &= +\ 6 \\ f'''\ (-1) &= -\ 84 \\ f''''\ (-1) &= +\ 72 \end{aligned}$$

deren nur noch 3 aufweist.

Indem wir -2 als Ausgangswert wählen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} f\ (-2) &= -\ 1 \\ f'\ (-2) &= -\ 40 \\ f''\ (-2) &= +\ 126 \end{aligned}$$

und

$$\alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -2 - 4\cdot\frac{-1}{-40} = -2 - 0{,}1 = -2{,}1,$$

also einen im Intervall $-5 \dashv -1$ liegenden Wert.

Durch Anwendung der Formeln (5) erhalten wir als erstes Paar von Näherungswerten:

$$A_1 = -2 - \frac{3\,(-40) + 4}{3\,(-1726) + 40} = -2{,}02257\cdots$$

$$B_1 = -2 - \frac{(-1)\,(-40) + 4}{(-1)\cdot(-1726) + 40} = -2{,}02491\cdots$$

Zu einem zweiten Paar von Näherungswerten der gesuchten Wurzel gelangen wir, indem wir $\alpha_1 = -2{,}024$ setzen.

Es wird dann:

$$\begin{aligned} f\ (\alpha_1) &= -\ 0{,}003351580672 \\ f'(\alpha_1) &= -\ 43{,}069093888 \\ f''(\alpha_1) &= +\ 129{,}764736 \end{aligned}$$

und

$$\alpha_1 - n\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = -2{,}024 - 0{,}0003\cdots = -2{,}0243\cdots,$$

liegt also im Intervall $B_1 \dashv A_1$,
und

$$A_2 = -2{,}024 - 0{,}003351580672 \cdot \frac{-0{,}002\,(-43{,}069093888) + 4 \cdot 0{,}003351580672}{-0{,}002\,(-0{,}003351580672 \cdot 129{,}764736 - 43{,}069093888^2) + 0{,}003351580672 \cdot 43{,}069093888}$$

$$= -2{,}024 - 0{,}000086542\cdot\cdot = \underline{-2{,}024086542\cdots}$$

$$B_2 = -2{,}024 - 0{,}003351580672 \cdot \frac{0{,}001\,(-43{,}069093888) + 4 \cdot 0{,}003351580672}{0{,}001\,(-0{,}003351580672 \cdot 129{,}764736 - 43{,}069093888^2) + 0{,}003351580672 \cdot 43{,}069093888}$$

$$= -2{,}024 - 0{,}000058\cdot\cdot = \underline{-2{,}024058\cdot\cdot}$$

Die gesuchte Wurzel liegt im Intervall $A_2 - B_2$, also

$$\underline{-2{,}0240865\cdots < x_1 < -2{,}024058\cdots}$$

Eine zweite Wurzel der gegebenen Gleichung $f(x) = 0$ liegt im Intervall $-2 - 0$, da $f(-2)$ und $f(o)$ entgegengesetztes Vorzeichen besitzen und $f'(x)$ im betrachteten Intervall das gleiche Vorzeichen beibehält.

Indem wir $\alpha = -1$ wählen, wird

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 \\ f'(-1) &= +20 \\ f'''(-1) &= +6 \end{aligned}$$

und

$$\alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = -1 + \frac{1}{5} = -0{,}8\,,$$

liegt also im Intervall $-2 - 0$.

Es folgt nach Formel (5)

$$A_1 = -1 - 1\cdot\frac{20 - 4\cdot(-1)}{-6 - 400 - 20} = -1 + 0{,}0558\cdots = \underline{-0{,}9441\cdots}$$

$$B_1 = -1 - 1\cdot\frac{-20 - 4\cdot(-1)}{-[-6 - 400] - 20} = -1 + 0{,}0414\cdots = \underline{-0{,}9585\cdots}$$

Setzen wir nun $\alpha_1 = -0{,}95$ und für $A_1 = -0{,}93$; $B_1 = -0{,}97$, so folgt:

$$\begin{aligned} f(-0{,}95) &= +0{,}00576875 \\ f'(-0{,}95) &= +20{,}1965 \\ f'''(-0{,}95) &= +1{,}89 \end{aligned}$$

und

$$\alpha_1 - n\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = -0{,}95 - 0{,}001\cdots = -0{,}951\cdots$$

Als ein zweites Paar von Näherungswerten ergeben sich:

$$A_2 = -0{,}95 + 0{,}00576875 \cdot \frac{-0{,}02 \cdot 20{,}1965 - 4 \cdot 0{,}00576875}{-0{,}02\,[0{,}00576875 \cdot 1{,}89 - 20{,}1965^2] + 0{,}00576875 \cdot 20{,}1965}$$

$$= -0{,}95 - 0{,}0002977\cdots = \underline{-0{,}9502977\cdots}$$

$$B_2 = -0{,}95 + 0{,}00576875 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 20{,}1965 - 4 \cdot 0{,}00576875}{0{,}02\,[0{,}00576875 \cdot 1{,}89 - 20{,}1965^2] + 0{,}00576875 \cdot 20{,}1965}$$

$$= -0{,}95 - 0{,}000273\cdots = \underline{-0{,}950273\cdots}$$

Das Intervall $A_2 - B_2$ schließt die gesuchte Wurzel ein, also:

$$\underline{-0{,}9502977\cdots < x_2 < -0{,}950273\cdots}$$

Eine dritte Wurzel ist im Intervall $0 - +2$ gelegen, da die Reihe $f(x)$; $f'(x)$; $f''(x)$; $f'''(x)$; $f''''(x)$ beim Wachsen des Arguments x von 0 bis 2 einen Vorzeichenwechsel verliert.

Als Ausgangswerte für die näherungsweise Bestimmung der Wurzel x_3 wählen wir:

$$a = 1;\ A = -0{,}5;\ B = 1{,}5.$$

Dann wird:

$$f(1) = -13$$
$$f'(1) = -40$$
$$f''(1) = -18$$

und

$$a - n\frac{f(a)}{f'(a)} = 1 - 1{,}3 = -0{,}3$$

und ferner

$$A_1 = 1 - 13\,\frac{1{,}5 \cdot (-40) + 4 \cdot 13}{1{,}5 \cdot (13 \cdot 18 - 1600) + 13 \cdot 40} = 1 - 0{,}068\cdots = \underline{0{,}931\cdots}$$

$$B_1 = 1 - 13 \cdot \frac{-0{,}5\,(-40) + 4 \cdot 13}{-0{,}5\,(13 \cdot 18 - 1600) + 13 \cdot 40} = 1 - 0{,}777\cdots = \underline{0{,}222\cdots}$$

Indem wir nun für α_1 den ungefähren Mittelwert von A_1 und B_1 setzen, und als Grenzwerte A'_1 und B'_1 die Werte 1,6 bez. — 0,4, folgt:

$$f\ (0{,}6) = +\ 0{,}9968$$
$$f'\ (0{,}6) = -\ 28{,}768$$
$$f''\ (0{,}6) = -\ 36{,}24$$

und

$$\alpha_1 - n\frac{f(\alpha_1)}{f_1(\alpha_1)} = 0{,}6 + 0{,}1\cdot\cdot = 0{,}7\cdot\cdot$$

$$A_2 = 0{,}6 + 0{,}9968\cdot\frac{28{,}768 - 4\cdot 0{,}9968}{0{,}9968\cdot 36{,}24 + 28{,}768^2 - 0{,}9968\cdot 28{,}768}$$

$$= 0{,}6 + 0{,}0295\cdot\cdot = \underline{0{,}6295\cdot\cdot}$$

$$B_2 = 0{,}6 + 0{,}9968\cdot\frac{-28{,}768 - 4\cdot 0{,}9968}{-0{,}9968\cdot 36{,}24 + 28{,}768^2 - 0{,}9968\cdot 28{,}768}$$

$$= 0{,}6 + 0{,}0365\cdot\cdot = \underline{0{,}6365\cdot\cdot}$$

Wählen wir nun

$$\alpha_2 = \frac{A_2 + B_2}{2} \sim 0{,}633$$

und ferner $A'_2 = 0{,}637$ und $B'_2 = 0{,}629$, so erhalten wir

$$f\ (0{,}633) = +\ 0{,}027913750163$$
$$f'\ (0{,}633) = -\ 29{,}946500356$$
$$f''\ (0{,}633) = -\ 35{,}171196$$

und

$$\alpha_2 + n\frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)} = 0{,}633 + 0{,}003\cdot\cdot = 0{,}636\cdot\cdot$$

und als drittes Paar von Näherungswerten:

$$A_3 = 0{,}633 + 0{,}027913750163\cdot\frac{0{,}004\cdot 29{,}946500356 - 4\cdot 0{,}027913750163}{-0{,}004\,[-0{,}027913\cdot\cdot\ 35{,}171196 - 29{,}946\cdot\cdot^2] - 0{,}0279\cdot\cdot\ 29{,}946\cdot\cdot}$$

$$= 0{,}633 + 0{,}000082\cdot\cdot = \underline{0{,}633082\cdot\cdot}$$

$$B_3 = 0{,}633 + 0{,}027913750163\cdot\frac{-0{,}004\cdot 29{,}946500356 - 4\cdot 0{,}027913750163}{0{,}004\,[-0{,}0279\cdot\cdot\cdot\ 35{,}171196 - 29{,}946\cdot\cdot^2] - 0{,}0279\cdot\cdot\cdot\ 29{,}946\cdot\cdot}$$

$$= 0{,}633 + 0{,}001459\cdot\cdot = \underline{0{,}634459\cdot\cdot}$$

und es ist somit:

$$\underline{0{,}633082\cdots < x_3 < 0{,}634459\cdots}$$

Um ein Paar von Näherungswerten der Wurzel x_4 zu erhalten, die im Intervall $1 \rightarrowtail 5$ liegt, setzen wir $\alpha = 3$.

Es wird dann

$$f\ (3) = -1$$
$$f'\ (3) = +140$$
$$f''\ (3) = +246$$

und

$$\alpha - n\,\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 3 + \frac{4}{140}$$

ist also im Intervall $1 \rightarrowtail 5$ gelegen, und

$$A_1 = 3 - \frac{2\cdot 140 + 4}{2[-246 - 19600] - 140} = 3 + 0{,}0071299\cdots = 3{,}0071299\cdots$$

$$B_1 = 3 - \frac{-2\cdot 140 + 4}{-2[-246 - 19600] - 140} = 3 + 0{,}00697\cdots = 3{,}00697$$

Um zu einem zweiten Paar von Näherungswerten zu gelangen, setzen wir $\alpha_1 = 3{,}007$ und als Grenzwerte des Intervalles $B'_1 \rightarrowtail A'_1$ die Werte 3,006 und 3,008. Unter diesen Annahmen wird:

$$f\ (3{,}007) = -0{,}013961330797$$
$$f'\ (3{,}007) = +141{,}727002116$$
$$f''\ (3{,}007) = +247{,}429764$$

und

$$\alpha_1 - n\,\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)} = 3{,}007 + 0{,}00039\cdots = 3{,}00739\cdots$$

liegt also im Intervall $B'_1 \rightarrowtail A'_1$, und

$$A_2 = 3{,}007 - 0{,}013961330797 \cdot \frac{-0{,}001 \cdot 141{,}727002116 + 4 \cdot 0{,}013961330797}{-0{,}001\,[-0{,}0139\cdot\cdot 247{,}429764 - 141{,}72\cdot\cdot^2] - 0{,}0139\cdot\cdot 141,}$$

$$= 3{,}007 + 0{,}0000602\cdot\cdot = \underline{3{,}0070602\cdot\cdot}$$

$$B_2 = 3{,}007 - 0{,}013961330797 \cdot \frac{0{,}001 \cdot 141{,}727002116 + 4 \cdot 0{,}013961330797}{0{,}001 \cdot [-0{,}0139\cdot\cdot 247{,}429764 - 141{,}72\cdot\cdot^2] - 0{,}0139 \cdot 141,}$$

$$= 3{,}007 + 0{,}0001359\cdot\cdot = \underline{3{,}0071359\cdot\cdot}$$

Die gesuchte Wurzel x_4 der gegebenen Gleichung liegt im Intervall $A_2 - B_2$, es ist also:

$$\underline{3{,}0070602\cdot\cdot < x_4 < 3{,}0071359\cdot\cdot}$$

Die Mittelwerte der Intervalle, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung beidseitig begrenzen, sind

$$\begin{aligned} x_1 &= -2{,}024072\cdot\cdot \quad [-2{,}024078\cdot\cdot] \\ x_2 &= -0{,}950285\cdot\cdot \quad [-0{,}950285\cdot\cdot] \\ x_3 &= 0{,}63377\cdot\cdot \quad [0{,}633931\cdot\cdot] \\ x_4 &= 3{,}007098\cdot\cdot \quad [3{,}007098\cdot\cdot], \end{aligned}$$

während die in Klammer angegebenen Größen die wahren Werte der Wurzeln, auf 6 Dezimalstellen genau berechnet, darstellen.

Lebenslauf.

Geboren in Chur den 20. Januar 1891, durchlief ich die Klassen der technischen Abteilung der Kantonsschule Chur und begann nach bestandener Maturitätsprüfung im Herbst 1909 meine Studien an der eidgenössischen technischen Hochschule in Zürich. Im Sommer 1914 diplomierte ich daselbst zum Fachlehrer in mathematisch-physikalischer Richtung. Infolge des aktiven Dienstes konnte ich den Wunsch, meine Studien noch an einer andern Hochschule fortzusetzen, erst im Herbst 1916 verwirklichen. In der Zwischenzeit übernahm ich einige Stellvertretungen an schweizerischen Mittelschulen. Im Herbst 1916 immatrikulierte ich mich an der Universität Bern und doktorierte Ende des Sommer-Semesters 1917. Die Drucklegung der Dissertation verzögerte sich abermals infolge wiederholten Grenzdienstes.

Ich betrachte es als eine Ehrenpflicht, an dieser Stelle noch allen meinen hochverehrten Herren Lehrern an der Kantonsschule Chur und an den beiden Hochschulen in Zürich und Bern den wärmsten Dank für ihren anregenden Unterricht und ihr mir erwiesenes Wohlwollen auszusprechen. Insbesondere gedenke ich der Herren Prof. Dr. Hurwitz an der Eidgenössischen Technischen Hochschule und Prof. Dr. Graf an der Universität Bern, welche die Freundlichkeit hatten, meine Diplomarbeit und meine Dissertation wohlwollend zu prüfen.

OCT 28 '86

Return this book on or before the *Latest Date* stamped below. A charge is made on all overdue books.

U. of I. Library

APR 1 1

17625-S

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.94T72U C001
UBER ALGEBRAISCHE GLEICHUNGEN MIT LAUTER
3 0112 017083426